This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

3 3433 06909674 5

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE PRATIQUE.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE PRATIQUE.

CET OUVRAGE SE TROUVE AUSSI :

à Toulouse..... chez CHARPENTIER.

LEIPSICK, chez MICHELSEN.
LONDRES, chez DULAU et Cie.

Genève..... chez CHERBULIEZ.
Pétersbourg..... — GRAFF.
Turin..... — BOCCA. / PIC.
Vienne..... — ROHRMANN.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

(Geometry) (I.C.)

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE PRATIQUE

COMPRENANT

LES OPÉRATIONS GRAPHIQUES

ET DE

NOMBREUSES APPLICATIONS AUX TRAVAUX D'ART ET DE CONSTRUCTION,

A L'USAGE

Des Colléges et des Pensions, des Écoles normales primaires, des Institutions primaires du degré supérieur; des Employés des Ponts-et-Chaussées ou Agents-Voyers, des Géomètres du Cadastre, des Entrepreneurs des Travaux publics;

Par J.-J. REGNAULT,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES, BACHELIER ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PARIS,

BAGHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1842.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R L

AVERTISSEMENT.

Dans les diverses fonctions que j'ai été appelé à remplir, soit militaires, soit administratives, soit universitaires, j'ai eu lieu de remarquer combien la méthode d'application est fructueuse pour tous ceux qui se livrent à l'étude des sciences mathématiques, à quelque degré et à quelque titre que ce soit. Les conducteurs, les entrepreneurs de travaux et les chefs d'atelier ont besoin de théories qui les dirigent dans l'application; les jeunes gens, dans les pensions comme dans les colléges, les instituteurs même, ont besoin d'applications qui développent la théorie : il m'a semblé qu'un Traité de Géométrie pratique qui répondît complétement à ce double but, serait un œuvre utile; je me suis efforcé de l'accomplir de la manière qui m'a paru la plus profitable.

Je n'ai pas la prétention d'avoir doté la science de découvertes nouvelles : mon recueil ne contient que des théories et des applications déjà connues. Mon seul mérite, si c'en est un, est de les avoir réunies, et peut-être éclaircies, dans un ouvrage qui les présente d'une manière méthodique et complète. Je suis convaincu que mes efforts amèneront quelques résultats positifs.

Je crois que les élèves qui auront étudié mon Traité de Géométrie pratique, auront une notion plus certaine et moins incomplète d'une théorie éclairée par l'ap-

plication judicieuse que l'on en fait aux arts et aux sciences. Beaucoup de jeunes gens, après les études classiques, suivent des carrières dans lesquelles les mathématiques jouent un rôle secondaire, il est vrai, mais toujours important; il leur est nécessaire d'avoir les notions de la science usuelle, ne fût-ce que pour ne pas être étrangers à des questions qui se présentent à chaque pas aujourd'hui. Cette classe de lecteurs trouvera dans mon livre les principes mathématiques réduits à l'expression la plus simple, et comme il faut au moins qu'un homme du monde les possède.

Au surplus, l'étude facile et souvent agréable de la pratique de la Géométrie procure, indépendamment d'applications parfois très-heureuses, une méthode de raisonnement toujours sûre et des aperçus, des considérations, des ressources toujours marquées au cachet d'une certitude, d'une profondeur incontestables.

On sait que la loi de 1832 sur l'instruction primaire a établi que les instituteurs devaient être capables, non-seulement d'enseigner la mesure de l'étendue par la théorie, mais encore d'apprendre à leurs élèves à lever des plans, à mesurer les champs, à faire des partages, des estimations, etc., etc. De jour en jour les dispositions de cette loi sont appliquées plus rigoureusement. Les commissions d'examen n'ont-elles pas raison, en effet, de se montrer exigeantes et sévères, lorsqu'il s'agit de connaissances si importantes? Lorsque je faisais moi-même partie d'une commission de ce genre, j'ai souvent entendu les candidats se plaindre de n'avoir pas à leur portée un ouvrage où ils pussent puiser ces connaissances. Ces plaintes me paraissaient fondées jusqu'à un certain point, et j'ai pris à cœur de combler

cette lacune, en rassemblant dans un volume toutes les solutions qui ont rapport, soit au levé des plans, soit au nivellement ou à l'arpentage.

Une autre classe que j'ai eue également en vue en composant ma Géométrie pratique, c'est celle des employés des ponts-et-chaussées et des agens-voyers. Sur tous les points de la France, dans toutes les communes, jamais il ne s'est établi de communications plus multipliées, et cependant les développements croissants de l'industrie, du commerce et de l'agriculture tendent chaque jour à rendre ces communications plus nombreuses; c'est pourquoi le nombre des employés s'augmente aussi lui-même. J'ai donc cru rendre un véritable service aux personnes qui se destinent à embrasser cette profession, en traitant diverses questions sur le nivellement, et en donnant des formules pour simplifier le calcul des solides, que j'ai le plus souvent décomposés en pyramides ou en prismes; j'ai fait ensuite une application immédiate de ces formules, en calculant les volumes d'une borne, d'un tronc d'arbre en grume ou équarri, d'un bateau, d'un tonneau, d'un tas de pierres comme on en trouve sur nos routes, etc. Enfin, pour compléter cette étude autant que possible, et ne rien laisser d'incompris ou de vague, j'ai exposé, en terminant mon ouvrage, un projet entier de route; j'ai suivi les diverses phases de cette opération; j'ai fait le plan, le tracé sur le terrain et sur le plan rapporté, le nivellement, et le calcul des déblais et remblais. Cet exemple pourra servir de modèle pour l'ordre à suivre sur le terrain, et d'exercice dans le cabinet. En outre, comme on ne peut pas trop acquérir l'habitude d'opérer, j'ai proposé plusieurs autres questions comme exercices.

On comprend, après ce que je viens de dire, que mon recueil ne sera pas d'une moindre utilité pour les entrepreneurs, pour les contre-maîtres, pour les ouvriers en maçonnerie, en charpenterie, plâtrerie, etc. En effet, j'ai dirigé tous mes efforts vers un but qui me paraît essentiel en mathématiques, surtout dans le domaine de la pratique; c'est de rendre aussi clairs que possible les sujets que l'on traite, en les dégageant de tous les points de vue théoriques qui les obscurcissent, et de procéder plutôt en partant de l'application pour arriver à la théorie, que de la théorie à l'application. J'espère donc que les ouvriers qui consulteront mon Traité pourront apprendre à tracer eux-mêmes sur le terrain l'ouvrage qu'ils auront à exécuter, et qu'une fois ces ouvrages achevés, ils sauront eux-mêmes en faire le métré, sans être obligés d'accorder aveuglément leur confiance à des toiseurs dont auparavant ils n'auraient pas été à même de vérifier ni les opérations ni les mémoires.

Je n'ai pu, dans ce simple exposé, qu'indiquer très-sommairement le but de la Géométrie pratique et les avantages que l'on peut y trouver. On sait que la Géométrie de Legendre, qui est encore la plus classique que nous ayons, est un livre tout théorique. Le mien, essentiellement pratique, suit les théorèmes de Legendre pas à pas; de sorte que, dans les deux ouvrages, la pratique et la théorie marchent parallèlement.

TABLE DES MATIÈRES.

Nos. Pages.

AVERTISSEMENT v

CHAPITRE Ier. — *Définitions des différentes sortes d'étendue.*

1 Définitions. Corps ou solide 1
2 Surface . . . . . *ib.*
3 Ligne 2
4 Point . . . . . *ib.*
5 Ligne droite . . . . . *ib.*
6 Usage de la droite . . . . . *ib.*
7 Instrument qui la donne 3
8 Ligne courbe . . . . . *ib.*
9 Ligne brisée ou anguleuse . . . . . *ib.*
10 Plan ou surface plane . . . . . *ib.*
11 Surface courbe . . . . . *ib.*
12 Intersections de deux surfaces . . . . . *ib.*

CHAPITRE II. — *Définitions, angles, perpendiculaires, obliques, parallèles.*

13 Angle 4
14 Manière de nommer un angle . . . . . *ib.*
15 Angle droit . . . . . *ib.*
16 Principe sur les angles droits . . . . . *ib.*
17 Angle aigu 5
18 Angle obtus . . . . . *ib.*
19 Perpendiculaire . . . . . *ib.*
20 Oblique 5
21 Principes sur les perpendiculaires et les obliques . . *ib.*
22 Parallèles 6
23 Principes sur les parallèles . . . . . *ib.*

Nos. Pages.

CHAPITRE III. — *Définitions, polygones.*

24 Figure 7
25 Polygone ou figure rectiligne . . . . . *ib.*
26 Éléments d'un triangle . . . . . *ib.*
27 Différentes sortes de triangles. 8
28 Principes sur le triangle isoscèle. . . . . *ib.*
29 Triangle équilatéral. . . . . *ib.*
30 Triangle équiangle . . . . . *ib.*
31 Principe sur le triangle équilatéral 9
32 Triangle rectangle. . . . . *ib.*
33 Principe sur le triangle rectangle . . . . . *ib.*
34 Différents quadrilatères. . . . . *ib.*
35 Principes sur les parallélogrammes . . . . . *ib.*
36 Carré. . . . . *ib.*
37 Rectangle ou carré long. 10
38 Losange . . . . . *ib.*
39 Trapèze . . . . . *ib.*
40 Polygone régulier. . . . . *ib.*
41 Polygone irrégulier. . . . . *ib.*
42 Diagonale. . . . . *ib.*

CHAPITRE IV. — *Construction d'une ligne droite.*

43 Jalon. 11
44 Fil à plomb . . . . . *ib.*
45 Placer verticalement un jalon sur le terrain. . . . *ib.*
46 Par deux points donnés, mener une droite sur un plan de petites dimensions . . . . . *ib.*
47 Par deux points donnés, mener une droite sur un plan de grande étendue 12
48 Par deux points donnés sur le terrain, mener une droite . . . . . *ib.*
49 Tracer sur le terrain une droite entre deux jalons dont on ne peut approcher. 14

Nos. Pages.

50 Prolonger une droite 14
51 Trouver sur le terrain l'intersection de deux droites. 15

CHAPITRE V. — *Mesure des lignes droites ou rectifiées.*

52 Mesurer une grandeur. 16
53 Divisions que doit contenir l'unité principale . . . *ib.*
54 Mesurer une ligne droite, lorsque l'unité principale contient la ligne à mesurer 17
55 Mesurer une ligne droite plus grande que l'unité principale de longueur . . . . . *ib.*
56 Mesurer une ligne courbe par le moyen d'une unité linéaire rectiligne. 18

CHAPITRE VI. — *Cercle. Définitions. Division de la circonférence. Mesure des angles.*

57 Cercle 19
58 Rayon. . . . . *ib.*
59 Diamètre. . . . . *ib.*
60 Arc 20
61 Corde . . . . . *ib.*
62 Principes sur le diamètre et le rayon . . . . . *ib.*
63 Ancienne division de la circonférence.. . . . . *ib.*
64 Mesure des angles 21

CHAPITRE VII. — *Instruments pour former des angles.*

65 Fil à plomb 21
66 Le compas ordinaire.. 22
67 Le compas à verge . . . . . *ib.*
68 Moyen de remplacer le compas à verge, lorsqu'on opère sur le terrain. . . . . *ib.*
69 Le rapporteur 23
70 La fausse équerre. . . . . *ib.*
71 La fausse équerre du tailleur de pierre . . . . . *ib.*
72 L'équerre. 23

Nos. Pages.

73 L'équerre d'arpenteur 24
74 L'équerre octogone. . . . . *ib.*
75 Angles que peut donner l'équerre octogone. . . . . *ib.*
76 Le goniasmomètre . . . . . *ib.*

CHAPITRE VIII. — *Construction d'angles.*

77 Décrire avec un rayon donné, un arc ou une circonférence sur le terrain 25
78 Par un point donné sur une droite, en mener une autre qui fasse avec elle un angle donné, le plan ayant peu d'étendue 26
79 Former sur le terrain ou sur un plan de grande étendue un angle égal à un angle donné. 27

CHAPITRE IX. — *Construction de lignes perpendiculaires.*

80 Par un point donné sur une droite et sur un plan de peu d'étendue, mener une perpendiculaire à cette droite 28
81 Par un point A d'une droite tracée sur le terrain, mener une perpendiculaire à cette droite 29
82 Trouver le milieu d'une droite donnée AB 31
83 Mener une perpendiculaire sur le milieu d'une droite. 32
84 Par un point donné hors d'une droite sur un plan de peu d'étendue, mener une perpendiculaire à cette droite. 33
85 Par un point donné hors d'une droite sur le terrain, ou sur un plan de grande étendue, mener une perpendiculaire à cette droite. 34

CHAPITRE X. — *Construction de lignes parallèles.*

86 Mener une parallèle à une droite donnée, lorsque l'on connaît seulement la distance entre les parallèles. 36

Nos. Pages.

87 Par un point A donné sur une surface de peu d'étendue, mener une parallèle à la droite donnée AB. 37

88 Par un point A donné sur le terrain, mener une parallèle à une droite donnée 38

89 Par un point A donné hors d'une droite, mener sur le terrain une perpendiculaire à cette droite, en supposant qu'on n'ait ni équerre d'arpenteur, ni cordeau d'une longueur égale à la distance du point A à la droite donnée 40

CHAPITRE XI. *Échelles.*

90 Échelle. 40

91 Manière de déterminer les échelles par rapport aux grandeurs réelles. 41

92 Construire l'échelle décimale simple . . . . . *ib.*

93 Prendre une longueur donnée, lorsque cette longueur est plus petite que l'échelle. . . . . *ib.*

94 Prendre une longueur donnée, lorsque cette longueur est plus grande que l'échelle construite . . 42

95 La figure étant construite, évaluer la longueur d'une ligne plus petite que l'échelle. . . . . *ib.*

96 Évaluer la longueur d'une ligne MN plus grande que l'échelle. 43

97 Échelle décimale composée. . . . . *ib.*

98 Trouver au moyen de l'échelle une longueur de $26^{m},7$, en supposant que chacune des dix parties de AI représente un mètre 44

99 Trouver la longueur d'une ligne donnée plus petite que l'échelle donnée 45

CHAPITRE XII. — *Construction de figures sur le terrain.*

100 Un côté d'un triangle étant donné sur le terrain, et la grandeur des deux autres étant connue, construire le triangle. 46

Nos. Pages.

141 Trouver la différence de niveau des deux points extrêmes A et Z, et figurer la ligne ABCDEFZ tracée sur le terrain. 67
142 Observations avec le niveau. . . . . *ib.*
143 Relevé du nivellement 68
144 La vérification du nivellement. 69
145 Mis au net. . . . . *ib.*
146 Tracer une ligne horizontale sur le contour d'une montagne . . . . . *ib.*
147 Manière de rapporter les résultats sur le plan. Rédaction du registre de nivellement 70
148 Plan général de comparaison. Cote. 71
149 Notation des cotes sur le plan du terrain. . . . . *ib.*
150 Trouver les cotes B, C, D par rapport au plan général de comparaison qui passe à 10 mètres au-dessus du point fixe A. 72
151 Continuer le nivellement précédent, et chercher les cotes de points A, B, C, qu'on ne peut voir du point L. 37
152 Indiquer les cotes lorsque les points à niveler sont au-dessus du plan de niveau de la station 74

CHAPITRE XVIII. — *Des levés. Projections, plans, profils, coupes, élévations, définitions et principes.*

153 Projection d'un point sur un plan. 76
154 Plans. . . . . *ib.*
155 Figures relatives à la description d'un même bâtiment 77
156 Profil. . . . . *ib.*
157 Coupe 78
158 Élévation. 79
159 Travail préparatoire pour un levé quelconque. Application aux levés de bâtiment 80
160 Croquis. . . . . *ib.*
161 Levé au mètre d'un terrain ou d'une étendue peu considérable de bâtiments 82

Nos. Pages.
162 Rapport sur le papier. 83
163 Former la carte d'un pays de peu d'étendue . . . . *ib.*
164 Former le canevas d'un plan 84
165 Orienter un plan 85
166 Levés à la planchette 86
167 Méthode de lever les détails d'un plan 87
168 Seconde méthode de lever les détails d'un plan . . 88
169 Lever l'espace accessible ABCDE . . . . . *ib.*
170 Graphomètre. 91
171 Mesurer un angle avec le graphomètre. 93
172 Lever au graphomètre l'espace accessible ABCDE. . 94
173 Chaîne métrique 95
174 Levés à la boussole. . . . . *ib.*
175 Lever avec la boussole le plan ABCDE, dont tous les points sont accessibles. 97

CHAPITRE XIX. — *Mesure des distances inaccessibles.*

176 Mesurer la distance d'un point B où l'on peut se placer à un autre point inaccessible A, et à peu près au même niveau, comme la largeur d'une rivière. 99
177 Mesurer la hauteur d'un point B′, en supposant qu'on puisse aller jusqu'au pied B, mais que l'on ne puisse y monter. 100

CHAPITRE XX. — *Mesure des aires des figures rectilignes.*

178 Mesurer une surface ou en chercher l'aire. 101
179 Formule . . . . . *ib.*
180 Trouver la surface d'un rectangle. . . . . *ib.*
181 Raisonnement 102
182 Trouver l'aire du carré ABCD dont le côté = 10 mèt. 103
183 Trouver l'aire d'un rectangle MNPR dont la base MN = $6^m,37$ et la hauteur MR ou H = $3^m,4$. . . . *ib.*
184 Trouver la surface du carré qui a douze unités pour côté. 104

Nos. Pages.

185 Trouver la surface d'un parallélogramme. 104
186 Trouver la surface d'un triangle, connaissant sa base et sa hauteur. . . . . *ib.*
187 Trouver la surface d'un triangle dont on connaît les trois côtés. . . . . *ib.*
188 Trouver l'aire d'un trapèze 105
189 Trouver l'aire d'un polygone régulier 106
190 Trouver l'aire d'un polygone quelconque. 107

CHAPITRE XXI. — *Mesure des lignes circulaires.*

191 *Premier principe.* Valeur de la circonférence. . . . 107
192 *Deuxième principe.* Quand on doit diviser un nombre par π, on peut multiplier ce nombre par $\frac{1}{\pi}$. . . 108
193 *Troisième principe.* $\frac{22}{7}$ est la valeur de la demi-circonférence quand le rayon $= 1$. 108
194 Connaissant le diamètre D ou le rayon R d'un cercle, en trouver la circonférence C . . . . . *ib.*
195 Trouver la circonférence d'un cercle dont le rayon $= 2^m,53$. . . . . *ib.*
196 Trouver la circonférence d'un cercle dont le rayon $= 1$. . . . . *ib.*
197 Connaissant la circonférence d'un cercle, en trouver le diamètre ou le rayon. 109
198 Trouver le diamètre d'un cercle dont la circonférence $= 15^m,90$. . . . . *ib.*
199 Connaissant le nombre de degrés d'un arc et le rayon du cercle auquel il appartient, trouver la longueur de cet arc . . . . . *ib.*
200 Le rayon d'un cercle est de $3^m,50$; l'arc est de $40°$, en trouver la longueur en mètres. 110
201 Trouver la longueur de l'arc de $62°17'$ appartenant à un cercle dont le rayon égale $5^m,36$ . . . . . *ib.*

Nos. Pages.

202 Mesurer par un moyen mécanique l'arc ou la circonférence d'un cercle 111

203 Connaissant la longueur et le nombre de degrés d'un arc, trouver la longueur de la circonférence dont il fait partie . . . . . *ib.*

204 La longueur A d'un arc est de 43°20′ et de $3^{m},70$; quelle est la longueur de la circonférence C à laquelle il appartient? . . . . . *ib.*

205 Connaissant la longueur d'un arc, et le rayon du cercle auquel il appartient, trouver le nombre de degrés de l'arc 112

206 Application . . . . . *ib.*

CHAPITRE XXII. — *Mesure des aires circulaires.*

207 Trouver l'aire d'un cercle dont on connaît la circonférence et le rayon 113

208 Application . . . . . *ib.*

209 Connaissant le rayon d'un cercle, en trouver la surface *ib.*

210 Application . . . . . *ib.*

211 Connaissant la circonférence d'un cercle, en trouver la surface 114

212 Application . . . . . *ib.*

213 Connaissant l'arc d'un secteur et le rayon du cercle, trouver l'aire du secteur . . . . . *ib.*

214 Application . . . . . *ib.*

215 Trouver l'aire d'un secteur circulaire . . . . . *ib.*

216 Application 115

217 Connaissant la surface d'un secteur, et la longueur de l'arc de cercle qui lui sert de base, trouver le rayon du cercle dont ce secteur fait partie . . . *ib.*

218 Application . . . . . *ib.*

219 Connaissant la surface d'un secteur circulaire, et le rayon du cercle, trouver la longueur de l'arc. 116

220 Application . . . . . *ib.*

Nos. Pages.

221 Trouver combien il faudrait de carreaux de forme hexagonale de $0^m,16$ de côté pour carreler une tour ronde de $5^m,3$ de diamètre 116

CHAPITRE XXIII. — *Définitions des polyèdres.*

222 Polyèdre 117
223 Arête d'un polyèdre 118
224 Polyèdre régulier . . . . . *ib.*
225 Prisme en général . . . . . *ib.*
226 Prisme droit . . . . . *ib.*
227 Parallélipipède ; sa base, sa hauteur . . . . . *ib*
228 Parallélipipède droit 119
229 Parallélipipède rectangle . . . . . *ib.*
230 Diagonale du parallélipipède . . . . . *ib.*
231 Pyramide ; sa base, sa hauteur, son sommet . . . *ib.*
232 Pyramide régulière . . . . . *ib.*
233 Tronc de pyramide à bases parallèles ; ses bases, sa hauteur 120
234 Tronc de prisme . . . . . *ib.*

CHAPITRE XXIV. — *Mesure de la surface des polyèdres.*

235 Trouver la surface d'un polyèdre quelconque . . . 120
236 Trouver la surface d'un prisme droit . . . . . *ib.*
237 Trouver la surface latérale d'une pyramide régulière, c'est-à-dire de la somme des triangles qui se réunissent au sommet 121
238 Application . . . . . *ib.*

CHAPITRE XXV. — *Mesure du volume du parallélipipède rectangle.*

239 Mesurer un solide ou en chercher le volume 122
240 Trouver le volume d'un parallélipipède rectangle et celui d'un cube . . . . . *ib.*
241 Trouver le volume d'un cube dont le côté est égal à 10 mètres 124

Nos. Pages.

242 Trouver le volume d'un parallélipipède rectangle dont les trois dimensions sont : longueur $= 4^m,25$; largeur $= 1^m,65$; hauteur $= 2^m,7$. 124

243 Calculer le nombre de mètres cubes de maçonnerie contenus dans un mur de $32^m,50$ de longueur sur $5^m,4$ de hauteur et $0^m,45$ d'épaisseur. Trouver aussi le prix de l'ouvrage, à 45 fr. 60 cent. le mètre cube 125

244 Chercher quelle quantité de poudre contiendrait une boîte cubique dont le côté $= 17$ pouces, sachant que le pied cube de poudre pèse 64 livres. . . . *ib.*

245 Le côté d'une boîte cubique est de $0^m,37$; on sait que 1 décimètre cube de poudre pèse $0^k,914$; que contiendra la boîte? 126

246 On a une charge de $46^k,297$ à placer dans une boîte cubique, quel en sera le côté? . . . . . *ib.*

CHAPITRE XXVI. — *Volumes des polyèdres quelconques.*

247 Chercher le volume d'un parallélipipède quelconque, et celui d'un prisme quelconque 127

248 Première application. . . . . *ib.*

249 Deuxième application. . . . . *ib.*

250 Trouver le volume d'une pyramide quelconque . 128

251 Trouver le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles. 129

252 Application. . . . . *ib.*

253 Trouver le volume d'un tronc de prisme triangulaire.. 130

254 Application. . . . . *ib.*

255 Trouver le volume d'un tronc de prisme quelconque. 131

256 Application. . . . . *ib.*

257 Trouver le volume d'un polyèdre quelconque . . 132

Nos. Pages.

CHAPITRE XXVII. — *Volumes de polyèdres quelconques.*

258 Description d'un ponton ou bateau plat 132
259 Trouver le volume d'un ponton . . . . . *ib.*
260 Chercher le volume d'un tas de pierres comme on en trouve sur les routes 134
261 Calculer le volume d'un remblai 135

CHAPITRE XXVIII. — *Définitions relatives aux trois corps ronds.*

262 Définition des corps ronds 138
263 Cylindre droit . . . . . *ib.*
264 Cône droit 139
265 Sphère 140
266 Tronc de cône à bases parallèles . . . . . *ib.*
267 Portions de la sphère et de la surface de la sphère . 141
268 Segment à deux bases . . . . . *ib.*
269 Zone . . . . . *ib.*
270 Secteur sphérique 142
271 Fuseau sphérique . . . . . *ib.*
272 Onglet sphérique . . . . . *ib.*

CHAPITRE XXIX. — *Mesure de la surface des corps ronds.*

273 Mesurer la surface d'un cylindre droit 143
274 Application . . . . . *ib.*
275 Mesurer la surface convexe d'un cône droit . . . 144
276 Application . . . . . *ib.*
277 Mesurer la surface convexe d'un tronc de cône à bases parallèles . . . . . *ib.*
278 Application 145
279 Mesurer la surface d'une sphère dont on connaît le rayon . . . . . *ib.*
280 Application 146

Nos. Pages.
281 Mesurer la surface d'une zone à une ou deux bases. 147
282 Première application . . . . . *ib.*
283 Deuxième application 148
284 Mesurer la surface d'un fuseau sphérique. . . . . *ib.*
285 Application. 149

CHAPITRE XXX. — *Mesure des volumes du cylindre et du cône.*

286 Chercher le volume d'un cylindre 150
287 Application. . . . . *ib.*
288 Chercher le volume d'un cône. 151
289 Application. . . . . *ib.*
290 Mesurer le volume d'un tronc de cône à bases parallèles. . . . . *ib.*
291 Trouver le volume d'un tronc de cône à bases parallèles dans le cas particulier où le diamètre de la base inférieure est égal à la hauteur du tronc et moitié du diamètre de la base supérieure. 152

CHAPITRE XXXI. — *Mesure des volumes de la sphère et de ses parties.*

292 Chercher le volume d'une sphère. 153
293 Application. . . . . *ib.*
294 Chercher le volume d'un segment sphérique à une base, lorsque l'on connaît le rayon de la base et la hauteur du segment 154
295 Chercher le volume d'un segment sphérique à une base, quand on connaît la hauteur du segment et le rayon de la sphère à laquelle il appartient. *ib.*
296 Comparaison du volume du segment à une base avec celui du cylindre. 155
297 Application. . . . . *ib.*
298 Chercher le volume d'un segment sphérique à deux bases 157
299 Application. . . . . *ib.*

N° s. Pages.

300 Calculer le volume d'un segment sphérique à deux bases, lorsque l'on connaît le rayon et les hauteurs des deux segments à une base dont le segment à deux bases fait partie. 158
301 Trouver le volume d'un secteur sphérique. . . . *ib.*
302 Application. 159
303 Chercher le volume d'un onglet sphérique. . . . *ib.*
304 Application. . . . . *ib.*

CHAPITRE XXXII. — *Volume d'un tronc d'arbre.*

305 Description de la forme d'un tronc d'arbre . . . 160
306 Chercher le volume d'un tronc d'arbre considéré comme un tronc de cône. . . . . *ib.*
307 Chercher le volume d'un tronc d'arbre considéré comme un cylindre 162
308 Trouver par approximation le volume d'un tronc d'arbre, connaissant la circonférence moyenne et la longueur de ce tronc. 165

CHAPITRE XXXIII. — *Volume d'une borne, d'un tonneau; projet d'une route.*

309 Calculer le prix d'une borne en pierre 166
310 Chercher le nombre de litres contenus dans un tonneau 170
311 Faire un projet de route. 171
312 Divers exercices à exécuter sur le terrain 183

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

GÉOMÉTRIE PRATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

DÉFINITIONS DES DIFFÉRENTES SORTES D'ÉTENDUE.

1. *Corps* ou *solide.* — Ce qui a de l'étendue en longueur, en largeur, et en profondeur, ou épaisseur. Les deux derniers noms signifient la même chose. On peut encore donner à l'une de ces trois dimensions le nom de hauteur.

Le corps a pour ses dimensions les trois sortes d'étendue dont on vient de parler; chacune est une dimension. Le mot corps n'a pas tout à fait la même signification dans la géométrie que dans l'usage ordinaire. On ne considère pas en géométrie de quoi est composé un corps, mais seulement l'espace qu'il peut occuper. Par exemple, une poutre ou un fossé de dimensions égales à celles de cette poutre sont pareillement des corps ou solides en géométrie.

2. *Surface.* — C'est l'étendue en longueur et en largeur seulement, ou sous deux dimensions. Ce qui termine un corps est la surface de ce corps.

3. *Ligne.* — C'est l'étendue en longueur, ou sous une seule dimension; par exemple, quand on considère l'étendue qu'il faut parcourir pour aller d'un lieu à un autre, en suivant une route tracée, on ne considère que la longueur du chemin, sans tenir aucun compte de sa largeur, ni de la profondeur du sol sur lequel il existe.

On représente une ligne par une ligne matérielle tracée sur le papier ou ailleurs, mais on la dépouille par la pensée de deux de ses dimensions (*fig.* 1 et 2).

4. *Point.* — C'est l'extrémité d'une ligne, ou le lieu d'intersection de deux lignes. On le considère souvent comme s'il pouvait exister indépendamment de la ligne. On le représente par un point matériel tracé sur le papier ou ailleurs, mais on le dépouille par la pensée de ses dimensions. On nomme un point par une lettre placée auprès.

On nomme une ligne par plusieurs lettres dont chacune désigne un point de cette ligne; les lignes AB (*fig.* 1); CDEF (*fig.* 2).

5. *Ligne droite* ou simplement *droite*, le plus court chemin d'un point à un autre.

Entre deux points, ou par deux points donnés, on ne peut mener qu'une droite.

6. *Usage de la droite.* — Elle mesure la distance entre deux points.

7. *Instrument qui la donne.* — Les arêtes d'une règle bien faite sont des droites.

La règle est le premier instrument du géomètre et du dessinateur.

8. *Ligne courbe.* — Ligne qui n'est ni droite, ni composée de lignes droites; la ligne courbe ABC (*fig.* 3).

9. *Ligne brisée* ou *anguleuse.* — Ligne composée d'un assemblage de droites; la ligne brisée CDEF (*fig.* 2).

10. *Plan* ou *surface plane.* — Surface sur laquelle on peut appliquer une droite dans tous les sens. C'est l'idée que nous nous faisons d'une glace bien polie, d'un parquet bien uni, d'une feuille de dessin bien tendue.

11. *Surface courbe.* — Surface qui n'est ni plane, ni composée de surfaces planes.

La surface d'une boule ou d'un globe; celle d'un tuyau de fourneau et celles des vases, sont des surfaces courbes.

12. *Intersections de deux surfaces.* — C'est une ligne droite ou courbe, suivant l'espèce des surfaces qui se coupent. L'intersection de deux plans est une ligne droite.

CHAPITRE II.

DÉFINITIONS, ANGLES, PERPENDICULAIRES, OBLIQUES, PARALLÈLES.

13. *Angle.* — Écartement plus ou moins grand de deux lignes qui se coupent. Angles ABC, CBD; les côtés de l'angle sont les droites AB, BC, BD qui forment les angles. Le sommet de l'angle est le point d'intersection des deux côtés d'un angle; le sommet B des deux angles ABC, CBD (*fig.* 4).

14. *Manière de nommer un angle.* — Si un angle est seul, on peut le nommer par une seule lettre placée au sommet de l'angle, l'angle D (*fig.* 5); mais si plusieurs angles ont leur sommet en un même point, on doit se servir de trois lettres, dont deux se placent sur les côtés, et l'autre au sommet; dans ce cas, la lettre du sommet se nomme toujours la seconde.

Les différentes sortes d'angles sont : l'*angle droit*, l'*angle aigu* et l'*angle obtus*.

15. *Un angle droit* est l'un des deux angles adjacents égaux que peuvent former deux droites. Si les deux angles ABD, DBC (*fig.* 6), formés par les deux droites AC, BD, sont égaux, ces angles sont droits.

16. PRINCIPE. — Tous les angles droits sont égaux.

17. *Un angle aigu* est un angle plus petit qu'un droit. Si ABD, DBC (*fig.* 6) sont droits, l'angle FBC sera un angle aigu.

18. *Un angle obtus* est un angle plus grand qu'un droit; ABF (*fig.* 6) est un angle obtus.

19. *Perpendiculaire.* — Une droite est perpendiculaire à une autre, quand elle fait avec elle deux angles droits : BD (*fig.* 6) est perpendiculaire à AC.

On nomme pied de la perpendiculaire le point où une droite rencontre la ligne à laquelle elle est perpendiculaire. B (*fig.* 6) est le pied de la perpendiculaire BD à la droite AC.

20. *Oblique.* — Une droite est oblique à l'égard d'une autre, quand elle fait avec cette autre deux angles inégaux : BF (*fig.* 6) est oblique à l'égard de AC.

21. PRINCIPES. — 1°. Si une droite AD (*fig.* 7) est perpendiculaire à une seconde droite BF, réciproquement BF est perpendiculaire à AD.

2°. Si une droite AF est oblique à l'égard de BF, réciproquement BF est oblique à l'égard de AF (*fig.* 7).

3°. Par un point D donné sur une droite BF, on ne peut lui mener qu'une seule perpendiculaire AD. Ainsi toute autre droite menée par le point D serait oblique à BF (*fig.* 7).

Sommet du triangle, le sommet de l'angle opposé au côté pris pour base, le point C opposé à la base AB (*fig.* 14).

Hauteur d'un triangle, la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base prolongée s'il le faut; CD perpendiculaire à AB est la hauteur du triangle ACB (*fig.* 14).

27. *Différentes sortes de triangles.* — Triangle scalène, celui dont les côtés sont inégaux (*fig.* 14).

Triangle isoscèle, celui dont deux côtés sont égaux, AC=CB (*fig.* 15).

Base d'un triangle isoscèle, le côté qui n'est point égal à l'un des autres, base AB (*fig.* 15).

Sommet du triangle isoscèle, le sommet de l'angle opposé à la base sommet C (*fig.* 15).

28. PRINCIPES. — Quand un triangle est isoscèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux (*fig.* 15). Si AC=CB, l'angle B égale l'angle A; et réciproquement si deux angles A et B d'un triangle sont égaux, les côtés opposés AC, BC, sont égaux, et le triangle est isoscèle.

29. *Triangle équilatéral.* — Celui dont les trois côtés sont égaux (*fig.* 15) : si AB=AC=CB, le triangle ABC est équilatéral.

30. *Triangle équiangle.* — Celui dont les trois angles sont égaux (*fig.* 15); angle A = angle B = angle C.

31. PRINCIPE. — Un triangle équilatéral est équiangle et réciproquement.

32. *Triangle rectangle.* — Celui qui a un angle droit (*fig.* 16); le triangle ABC est rectangle en A.

Hypoténuse, le côté opposé à l'angle droit d'un triangle rectangle, hypoténuse BC (*fig.* 16).

33. PRINCIPE. — Si les trois côtés d'un triangle valent en unités linéaires 3, 4, 5, le côté égal à 5 en est l'hypoténuse, et le triangle est rectangle.

34. *Différents quadrilatères.* — Parallélogramme, un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles (*fig.* 17, 18, 19, 20); AB est parallèle à CD, et AC l'est à BD.

Bases du parallélogramme, deux côtés opposés pris à volonté.

Hauteur du parallélogramme, la perpendiculaire comprise entre les deux côtés pris pour bases (*fig.* 17); si AB et DC sont les bases du parallélogramme ABCD, IK perpendiculaire à ces lignes en est la hauteur.

35. PRINCIPES. — 1°. Dans tout parallélogramme, les côtés opposés sont égaux.

2°. Réciproquement, si les côtés opposés d'un quadrilatère sont égaux, la figure est un parallélogramme.

36. *Carré.* — Un parallélogramme dont les côtés sont égaux, et les angles sont droits (*fig.* 18). Carré

ABCD, AB=AC=CD=DB; les angles A, B, C, et D sont droits.

37. *Rectangle ou carré long.* — Parallélogramme dont les angles sont droits, et dont les côtés contigus sont inégaux (*fig.* 19). Dans le rectangle ABCD, les angles sont tous droits; AB = CD; AC = BD; mais AB n'est pas égal à AC.

38. *Losange.* — Parallélogramme dont les côtés sont égaux, et dont les angles sont inégaux (*fig.* 20); dans le losange ABCD, AB=AC= CD=DB; mais l'angle A est plus petit que l'angle B.

39. *Trapèze.* — Quadrilatère dont deux côtés seulement sont parallèles (*fig.* 21). Si AB et CD sont parallèles, la figure ABCD est un trapèze.

Bases du trapèze, les côtés parallèles AB et CD.

Hauteur du trapèze, la perpendiculaire aux deux bases.

40. *Polygone régulier.* — Polygone dont tous les côtés ou tous les angles sont égaux (*fig.* 22). Dans le polygone régulier ABCDEF, AB=BC=CD=DE = etc.; de plus l'angle A = l'angle B = l'angle C = etc.

41. *Polygone irrégulier.* — Celui dont tous les côtés ou tous les angles ne sont pas égaux.

42. *Diagonale.* — Droite menée d'un sommet à un autre du polygone en le traversant (*fig.* 22); diagonales AC, AD.

CHAPITRE IV.

CONSTRUCTION D'UNE LIGNE DROITE.

43. *Jalon.* — On appelle ainsi une perche grande ou petite dont on se sert pour marquer un point sur le terrain. Les jalons dont on se sert communément ont environ 2 mètres de hauteur.

44. *Fil à plomb.* — Un plomb suspendu au bout d'un fil qui sert à indiquer la verticale ou la ligne suivant laquelle les corps tombent. Les directions de toutes les verticales peuvent être considérées comme parallèles entre elles, surtout pour de petites distances.

45. PREMIÈRE QUESTION. — Placer verticalement un jalon sur le terrain.

SOLUTION. — On visera sur ce jalon avec le fil à plomb; il faut que dans deux positions successives, l'observateur trouve le jalon et le fil à plomb dans le même plan, c'est-à-dire qu'ils soient cachés l'un par l'autre.

REMARQUE. — Si deux personnes font des observations en même temps avec le fil à plomb, elles pourront placer le jalon sans tâtonnement.

46. DEUXIÈME QUESTION. — Par deux points

donnés, mener une droite sur un plan de petites dimensions.

SOLUTION. — On applique la règle contre ces deux points, et l'on fait glisser le long de cette règle un crayon, une plume, ou un tire-ligne chargé d'encre, et l'on trace la ligne demandée.

47. TROISIÈME QUESTION. — Par deux points donnés, mener une droite sur un plan de grande étendue.

PREMIER MOYEN. — On tend un cordeau enduit d'une couleur, comme de craie ou de noir de fumée de paille, en appliquant les extrémités sur les deux points donnés. On écarte ensuite un peu le cordeau de la surface, en le pinçant par le milieu, de manière qu'il reste sensiblement dans un plan perpendiculaire à la surface. On le laisse retomber, et, cédant à la tension, il frappe le plan dans sa longueur, et laisse une trace de la couleur dont il est enduit. On a la ligne demandée. Ce moyen est fréquemment employé par les charpentiers pour tracer une droite sur une pièce de bois un peu longue.

DEUXIÈME MOYEN. — On se sert d'un cordeau non préparé pour marquer différents points de repère, contre lesquels on applique successivement la règle pour tracer les diverses parties de la ligne droite demandée.

48. QUATRIÈME QUESTION. — Par deux points donnés sur le terrain, mener une droite.

PREMIER MOYEN. — On peut employer un cordeau, comme dans le cas précédent, et planter des piquets de distance en distance.

DEUXIÈME MOYEN. — On peut tracer une droite par alignement, ce qui comprend deux cas: 1° lorsque de l'un des deux points extrêmes on aperçoit l'autre, on place verticalement un jalon à chacune des extrémités de la droite à tracer; on en place ensuite d'autres entre eux, de manière que chaque jalon intermédiaire masque le jalon extrême opposé à celui où l'on a visé; 2° lorsqu'il y a entre les deux points extrêmes un point assez élevé pour que de l'un d'eux on ne puisse apercevoir l'autre. Soient B et C les deux points donnés où sont placés verticalement deux jalons entre lesquels se trouve un monticule dont la partie la plus élevée, qu'on appelle partie culminante, est en A. On cherchera par divers essais à placer vers la partie A deux jalons verticaux P et R, de telle sorte qu'en regardant B de R, on trouve ce jalon masqué par le jalon P, et que de P, regardant C, ce dernier jalon soit masqué par R; on en conclura que les jalons B, P, R, C, sont dans un même plan vertical et en ligne droite. On placera ensuite, d'après la méthode qui vient d'être donnée, autant de jalons qu'on jugera convenable entre B et P, entre R et C (*fig.* 23).

Remarque sur les moyens de remplacer le cordeau. — Quand le cordeau ne doit pas rester sur le terrain, on fait une rigole pour marquer la droite,

ou bien, dans les travaux de route, on place des piquets à la suite les uns des autres.

49. CINQUIÈME QUESTION. — Tracer sur le terrain une droite entre deux jalons dont on ne peut approcher.

SOLUTION. — Soient A et B les deux jalons donnés; d'un point quelconque C qu'on prendra de suite, aussi peu éloigné qu'on le pourra, à la première vue de l'alignement AB, on visera vers l'un des jalons, vers B, par exemple, et l'on placera un jalon en un point D. On se transportera en D, d'où l'on visera vers A; on fera encore placer un jalon en quelque point du rayon visuel en C′; on visera de nouveau de C′ vers B; et l'on fera marquer un point D′. Les points D, C′, D′, se rapprochent continuellement de l'alignement AB, en forçant un peu la position d'un de ces points pour le rapprocher davantage de l'alignement AB, on obtiendra bientôt un point D″, tel qu'après avoir pris un point C″ sur l'alignement D″A, on verra ensuite de C″ le point D″ sur l'alignement C″B, et les deux jalons C″, D″, appartiendront à l'alignement cherché. S'il se trouve que le point D″ soit au-delà du véritable alignement, on l'y ramènera bientôt avec un peu de tâtonnement (*fig.* 24).

50. SIXIÈME QUESTION. — Prolonger une droite.

1°. On prolongera une droite en appliquant la

règle ou le cordeau sur une partie de la droite tracée comme on l'a indiqué précédemment.

2°. On prolonge un alignement déterminé par des jalons, en plaçant de nouveaux jalons de manière à ce qu'en cherchant à les voir, on les trouve masqués par les premiers que l'on a placés.

51. SEPTIÈME QUESTION. — Trouver sur le terrain l'intersection de deux droites.

SOLUTION. — Soient AB, CD, les deux alignements dont on cherche l'intersection; entre les jalons extrêmes A et B on placera au moins un troisième jalon F, puis un autre E entre C et D. On se promènera sur l'un AB de ces alignements avec un autre jalon, de manière à trouver toujours le jalon A masqué par le jalon F, et l'on regardera en même temps vers les points D et C; lorsqu'on sera en un point O, d'où l'on trouvera le jalon D masqué par le jalon E, on en conclura que le point O est à la fois sur les deux droites AB, DC, ou qu'il en est l'intersection (*fig.* 25).

Autrement. — On tendra à la fois deux cordeaux vers le milieu de chacun des deux alignements; quatre personnes opérant ensemble trouveraient bien vite la position des deux cordes AB, DC, dont l'intersection O serait le point cherché.

CHAPITRE V.

MESURE DES LIGNES DROITES OU RECTIFIÉES.

52. *Mesurer une grandeur*, c'est chercher combien de fois elle contient une autre grandeur de même espèce qu'elle. Ainsi mesurer une ligne, c'est chercher combien de fois une longueur connue qu'on appelle unité linéaire est contenue dans la ligne qu'on mesure. L'unité linéaire est ordinairement une droite. Le *mètre*, le *décimètre*, le *kilomètre*, etc., sont autant d'unités de longueur.

REMARQUE. — Il faut choisir l'unité principale telle, qu'elle ne soit pas contenue un trop grand nombre de fois dans la grandeur à mesurer, et que, d'un autre côté, on puisse se dispenser d'en considérer des fractions trop petites. Par exemple, le kilomètre est une bonne longueur pour mesurer une étendue de chemin: mais il ne doit pas être employé pour mesurer un ouvrage de construction dont l'étendue peut au contraire être bien mesurée par le mètre.

53. *Divisions que doit contenir l'unité principale.* — Cette unité doit contenir les premières divisions qu'on en fait, et qui peuvent y être tracées sans qu'il s'ensuive de confusion. On trouve sur le mètre, les

décimètres et les *centimètres*. Sur le décimètre, pris pour unité principale, on trouve les *centimètres* et les *millimètres*.

54. PREMIÈRE QUESTION. — Mesurer une ligne droite, lorsque l'unité principale contient la ligne à mesurer.

On place la mesure le long de la ligne à mesurer, de manière qu'elles aient une extrémité commune; alors si l'autre extrémité de la ligne à mesurer se trouve sur une des divisions de la mesure, on a exactement le nombre de parties que contient cette ligne; mais si l'extrémité de la ligne à mesurer tombe entre deux divisions, on évalue par approximation la fraction à ajouter au nombre de parties cotées sur la mesure; quand on veut opérer avec plus d'exactitude, on emploie en même temps, pour évaluer la partie non cotée sur la mesure principale, une mesure plus petite, et qui contient des divisions plus petites. Ainsi, pour évaluer avec le mètre une longueur comprise entre $0^m,26$ et $0^m,27$, les centimètres étant les plus petites parties marquées sur le mètre, on se servira d'un décimètre sur lequel sont les millimètres, et si l'on trouve au-delà de 26 centimètres, 8 millimètres, on en conclura que la longueur cherchée est de $0^m,268$.

55. DEUXIÈME QUESTION. — Mesurer une ligne droite plus grande que l'unité principale de longueur.

On porte l'unité linéaire sur la ligne à mesurer autant de fois que cela est possible ; quand il y a un reste plus petit que l'unité, on l'évalue comme dans l'un des deux cas de la première question.

REMARQUE. — Lorsque l'on doit mesurer une distance entre deux points éloignés, on trace d'abord une droite soit au moyen des jalons, soit au moyen d'une corde tendue, ou encore par ces deux moyens réunis, et l'on mesure la longueur de la droite ainsi tracée par les moyens qui viennent d'être indiqués.

AUTRE REMARQUE. — Lorsqu'on doit prendre la distance horizontale entre deux points sur un terrain inégal ou incliné, cette circonstance se trouve dans le chapitre qui traite du nivellement.

56. TROISIÈME QUESTION. — Mesurer une ligne courbe par le moyen d'une unité linéaire rectiligne.

1°. Lorsque la courbure de la ligne n'est pas très-forte, on en mesure les parties prises assez petites pour qu'elles puissent être sensiblement regardées comme des droites, et la somme de ces longueurs partielles est la longueur demandée.

2°. Lorsque la courbure est trop forte pour que les parties à mesurer puissent être regardées comme des lignes droites, alors on applique un corps flexible, comme une perche de bois vert, ou une corde, le long de cette ligne, qu'ensuite on étend et l'on

mesure : on répète cette opération autant de fois qu'il le faut pour parcourir la ligne donnée, et en réunissant toutes les parties, on a la longueur demandée.

CHAPITRE VI.

CERCLE. DÉFINITIONS. DIVISION DE LA CIRCONFÉRENCE. MESURE DES ANGLES.

57. *Cercle.* — Surface plane terminée par une ligne courbe que l'on nomme circonférence, et dont tous les points sont également éloignés d'un point intérieur ; ce point se nomme centre.

Application. — Si tous les points de la courbe ABECD (*fig.* 26) sont également éloignés du point O, 1° la surface ABECD est un cercle ; 2° la ligne courbe est une circonférence de cercle ; 3° le point O est le centre du cercle.

58. *Rayon.* — Toutes droites menées du centre à la circonférence OB, OE, OD, sont des rayons (*fig.* 26).

PRINCIPE. — Tous les rayons sont égaux.

59. *Diamètre.* — Toute droite menée par le centre d'un cercle et terminée de part et d'autre à la circonférence ; BD est un diamètre (*fig.* 26).

60. *Arc.* — Partie de la circonférence; arc BA, arc BE (*fig.* 26).

61. *Corde.* — Droite qui joint les extrémités d'un arc; corde BA, corde BE (*fig.* 26).

62. PRINCIPES. — 1°. Le diamètre est double du rayon;

2°. Tous les diamètres sont égaux;

3°. Le diamètre divise le cercle et la circonférence en deux parties égales; ainsi, 1° la surface DCB est égale à la surface DAB et chacun est un demi-cercle; 2° l'arc DCB est égal à l'arc DAB et chacun est une demi-circonférence (*fig.* 26).

4°. Le diamètre est la plus grande corde qu'on puisse mener dans le cercle; BD>BE; BD>BA (*fig.* 26).

63. *Ancienne division de la circonférence.* — On partage la circonférence en 360 parties égales que l'on nomme degrés. Le quart de la circonférence contient 90 degrés; la demi-circonférence en contient 180; si AB et CD sont deux diamètres perpendiculaires l'un à l'autre, chacun des arcs AC, CB, BD, AD sera un quart de circonférence et vaudra 90 degrés. Le degré contient 60 minutes; la minute 60 secondes, et ainsi de suite. Le degré se marque par un petit °; les minutes par un accent ′; les secondes par deux accents ″, qu'on place en haut et à droite du nombre (*fig.* 27).

Exemple : trente-six degrés vingt minutes quinze secondes, s'écrivent ainsi : 36°20′15″. On peut donc exprimer les divisions de la circonférence de cette manière : une circonférence=360°; une demi-circonférence =180°; un quart de circonférence =90°; 1°=60′; 1′=60″.

64. *Mesure des angles.* — Un angle se mesure par l'arc de cercle compris entre ses côtés et décrit du sommet de cet angle comme centre.

Applications. — 1°. L'angle droit COB a pour mesure 90° (*fig.* 27);

2°. L'angle obtus FOB comprend plus de 90°;

3°. L'angle aigu FOA comprend moins de 90°;

4°. Deux angles droits, ou deux angles dont la somme vaut deux angles droits, ont ensemble 180° pour mesure. Ainsi COB + COA = 180° = FOB + FOA.

5°. L'angle demi droit est de 45°; si COF=FOA, COF = 45° aussi bien que FOA.

CHAPITRE VII.

INSTRUMENTS POUR FORMER DES ANGLES.

65. *Le fil à plomb.* — Un corps pesant quelconque suspendu à l'extrémité d'un fil ou d'une corde déliée,

compose tout cet instrument, qui sert à trouver la verticale (*fig.* 28).

66. *Le compas ordinaire.* — Il est composé de deux branches AC, BC, mobiles sur un axe placé à la tête C de l'instrument : il sert à décrire des arcs ou des circonférences sur un plan de peu d'étendue. La distance AB entre deux points se nomme rayon. Le compas est le deuxième instrument du géomètre (*fig.* 29).

67. *Le compas à verge.* — Il se compose d'une règle ou verge AB à l'une des extrémités de laquelle se trouve une pointe fixe; on adapte à la même règle une autre pointe qui peut glisser tout le long de la règle qui la traverse. Cet instrument est très-commode pour décrire des arcs avec un grand rayon (*fig.* 30).

REMARQUE. — Pour se servir du compas, on doit autant que possible tenir les pointes dans un plan vertical pendant qu'on meut l'instrument.

68. *Moyen de remplacer le compas à verge, lorsqu'on opère sur le terrain.* — Soit AB le rayon donné, A le centre du cercle à tracer. On prendra une perche ou une corde de la grandeur AB; on fixera une des extrémités en A par une cheville ou un piquet, autour duquel puisse tourner la perche ou la corde; à l'autre extrémité B on placera un second piquet, puis, en faisant tourner la perche ou la corde tendue sur le point A, on trouvera la circonférence BCDB. Quand on trace sur une surface unie et bien solide,

comme un plancher, on emploie en B, de la craie, un charbon ou tout autre moyen de tracer (*fig.* 31).

69. *Le rapporteur.* — C'est un demi-cercle ordinairement en cuivre ou en corne, sur le bord ou le limbe duquel sont marqués les degrés et quelquefois les demi-degrés de la circonférence. Il sert à faire un angle égal à un angle donné (*fig.* 32).

70. *La fausse équerre.* — On perce un trou à l'une des extrémités de deux règles ou de deux perches, on traverse les deux règles d'une cheville ou d'un clou rond, de manière qu'elles soient mobiles sur cet axe; on a la fausse équerre, dont on peut ouvrir les côtés sous un angle plus ou moins grand, de la même manière qu'on ouvre ou qu'on ferme les branches d'un compas (*fig.* 33).

71. *La fausse équerre du tailleur de pierre.* — Les tailleurs de pierre se servent d'un compas dont la forme est indiquée dans la *fig.* 34; ce compas leur sert de fausse équerre et ils lui donnent ce nom.

72. *L'équerre* est un triangle rectangle qui peut être formé d'un morceau de planche, de règles assemblées à angle droit. On en fait en métal comme en fer, en cuivre; on peut la composer de cordes réunies par des nœuds; si trois cordes tendues ont des longueurs comme 3, 4 et 5, elles forment un triangle rectangle ou une équerre (*fig.* 35).

REMARQUE. — Les côtés de l'angle droit peuvent

avoir une longueur quelconque. Lorsqu'on a déterminé l'angle droit, on peut à volonté augmenter ou diminuer les côtés liés entre eux, les faire égaux, par exemple, pour faire un triangle isoscèle.

73. *L'équerre d'arpenteur.* — Cet instrument repose sur un pied qu'on place verticalement. Il se compose d'un plan circulaire que l'on place horizontalement sur le pied; aux extrémités de deux diamètres perpendiculaires entre eux s'élèvent deux petits montants AC, BD, qu'on nomme pinnules; il s'y trouve de petites fentes verticales à travers lesquelles on vise sur des points donnés ou des points à trouver (*fig.* 36).

74. *L'équerre octogone.* — La figure ABCDEFHI offre le plan horizontal de cet instrument; il a huit pans ou faces perpendiculaires à ce plan, et qui sont par conséquent verticales lorsque l'instrument est placé. Ces huit pans forment une surface continue; ils sont traversés à leur milieu par des fentes verticales très-resserrées qu'on dirige sur des points à observer (*fig.* 37).

75. *Angles que peut donner cet instrument.* — On peut, avec l'équerre octogone, former des angles droits et des angles demi droits. On peut s'en servir pour planter des arbres en quinconce.

76. *Le goniasmomètre*, qu'on pourrait aussi appeler fausse équerre cylindrique. Cet instrument est

une boîte en cuivre composée de deux parties cylindriques qui s'adaptent bien l'une à l'autre. A la partie inférieure FCDL est une douille qui s'emmanche sur un pied vertical B'K; sur le bord supérieur FECG de cette première partie sont tracées et numérotées les divisions de la circonférence en degrés; de plus aux divisions 0 et 180 répondent des fentes verticales qui tiennent lieu de pinnules. La seconde partie FCD'M a aussi deux fentes verticales diamétralement opposées. En tournant à volonté cette seconde partie sur la première, on prend l'angle que l'on juge convenable, en plaçant l'une des fentes de la pièce supérieure sur la division de la pièce inférieure qui correspond au nombre de degrés demandés (*fig.* 38).

CHAPITRE VIII.

CONSTRUCTION D'ANGLES.

77. PREMIÈRE QUESTION. — Décrire avec un rayon donné, un arc ou une circonférence sur le terrain.

A chacune des extrémités d'une corde de grandeur convenable, on formera une boucle de manière que la distance entre les extrémités des piquets qu'on passera dans chacune d'elles soit égale au rayon donné. On fixera l'un de ces piquets au point donné comme centre (*fig.*39), au point O, par exemple; ten-

dant la corde, on tournera avec l'autre piquet et l'on marquera l'arc ou la circonférence demandée, soit par une rigole, soit par des piquets qu'on plantera de distance en distance.

78. DEUXIÈME QUESTION. — Par un point donné sur une droite, en mener une autre qui fasse avec elle un angle donné, le plan ayant peu d'étendue.

PREMIER MOYEN. — En employant la règle et le compas. Soient A l'angle donné, D le point donné sur la droite DG comme sommet de l'angle à former. Du sommet de l'angle donné A comme centre, avec un rayon pris arbitrairement, on décrit un arc BC. Du point D comme centre, avec le même rayon, on décrit un autre arc indéfini EF. Du point E comme centre, avec un rayon égal à la corde de l'arc BC, on décrit un arc *mn*, qui coupe l'arc EF en F. On mène la droite DF qui forme avec DG l'angle D égal à l'angle A. On a, par cette construction, formé le triangle FDE égal au triangle BAC (*fig.* 40).

DEUXIÈME MOYEN. — En employant le rapporteur. Soient A le point donné et BD la droite donnée; supposons qu'il faille former un angle de 36 degrés avec cette droite. On prolongera, s'il le faut, indéfiniment la droite BD; on placera le diamètre du rapporteur sur BD, de manière que le point A soit au centre de l'instrument; vis-à-vis la division qui répond à 36 degrés, on marquera un point C, puis, menant indéfiniment AC, on aura l'angle demandé CAD (*fig.* 41).

REMARQUE. — Dans le cas où l'angle n'est pas immédiatement donné en degrés, comme pour la *fig.* 40, on mesure l'angle donné A avec le rapporteur; pour cela on pose le centre de l'instrument en A, l'on dirige le diamètre sur AC, l'on observe le nombre de degrés marqués sur le rapporteur, au point où la ligne AB prolongée, s'il le faut, coupe l'arc tracé sur l'instrument, et l'on achève la construction comme on l'a précédemment indiquée.

79. TROISIÈME QUESTION. — Former sur le terrain ou sur un plan de grande étendue un angle égal à un angle donné.

PREMIER MOYEN. — En employant un triangle en cordes. On prendra à volonté deux points C et D sur les côtés de l'angle donné CAD. On assemblera trois cordes qu'on nouera aux points A′, D′, C′; puis on transportera le triangle ainsi formé en *a*, *c*, *d*, de manière que le côté A′C′ tombe sur *ac*; les points A′ et D′ détermineront le second côté de l'angle demandé *cad* (*fig.* 42).

REMARQUE. — On pourrait remplacer le triangle en cordes, en assemblant trois règles par un clou qui les unisse deux à deux aux points A, C, D.

SECOND MOYEN. — En faisant usage d'une fausse équerre. On placera le sommet de l'équerre au sommet A de l'angle donné CAD et un de ses côtés sur AD; on ouvrira l'instrument de manière que le second côté soit dirigé sur AC; ensuite, sans changer l'ouverture de l'instrument, on placera le som-

met A en A', on dirigera l'un de ses côtés sur la droite donnée A'M, l'autre prendra la direction AP, et en traçant la droite A'P, on aura l'angle PA'M = CAD (*fig.* 43).

CHAPITRE IX.

CONSTRUCTION DE LIGNES PERPENDICULAIRES.

80. PREMIÈRE QUESTION. — Par un point donné sur une droite et sur un plan de peu d'étendue, mener une perpendiculaire à cette droite.

PREMIER MOYEN. — En employant la règle et le compas, lorsqu'on peut prolonger à volonté la droite donnée. Soient BC la droite et A le point donnés. On prend deux distances égales AC, AB; du point B comme centre, avec un rayon d'une grandeur arbitraire, mais plus grand que AB, on décrit un arc *mn*; puis du point C comme centre, avec le même rayon, on décrit un second arc *rs* qui coupe le premier en un point O, et la droite OA est la perpendiculaire demandée (*fig.* 44).

DEUXIÈME MOYEN. — En employant la règle et le compas, le point étant à une des extrémités de la droite donnée. On prend un point quelconque M au-dessus de AP; de ce point comme centre avec un rayon égal à la distance MA, on décrit une circonfé-

rence RAP qui coupe la droite en quelque point P. Par ce point et par le centre M, on mène une droite PMR qui coupe la circonférence en un second point R, et la droite AR est la droite demandée (*fig.* 45).

TROISIÈME MOYEN. — En employant une règle et une équerre. On place une règle le long de la droite donnée; on applique contre cette règle une équerre de manière que le sommet de l'angle droit soit au point donné A, et, en traçant une droite le long du côté DA, on a la perpendiculaire demandée (*fig.* 46).

REMARQUE sur le choix du côté de l'équerre qu'on applique le long de la règle. Autant qu'on le peut, on fait glisser le plus long côté de l'équerre le long de la règle, parce qu'alors elle est moins exposée à se déranger. Le quatrième moyen offre à cet égard le plus d'avantages.

QUATRIÈME MOYEN. — En employant une règle et une équerre. On place le long de la droite AB un côté de l'angle droit de l'équerre, de manière que le point donné C corresponde à peu près au milieu du côté de l'équerre; puis on applique le long de l'hypoténuse une règle PQ, le long de laquelle on fait glisser l'équerre, jusqu'à ce que le second côté FD de l'angle droit passe par le point C. On trace la droite CD′, qui est la perpendiculaire demandée (*fig.* 47).

81. DEUXIÈME QUESTION. — Par un point A d'une

droite tracée sur le terrain, mener une perpendiculaire à cette droite.

PREMIER MOYEN. — En se servant de deux cordes égales. On prend sur la ligne donnée deux distances égales AB, AC. On fixe en B et en C, soit par des piquets verticaux, soit par des hommes, une des extrémités de deux cordes égales, et chacune plus grande que AB. On réunit les deux autres bouts en tendant ces cordes; le point D de réunion appartient à la perpendiculaire demandée AD (*fig.* 48).

REMARQUE. — Deux règles égales peuvent remplir le même objet que deux cordes.

DEUXIÈME MOYEN. — En faisant usage d'une seule corde. A un point C pris à volonté dans l'angle que doivent former les perpendiculaires, on fixera une des extrémités d'une corde par un piquet qui traversera un œillet fait à cette extrémité. On tendra la corde de manière à avoir la longueur CA; puis on se promènera avec l'extrémité A sur l'alignement AB, jusqu'à ce que la corde étant encore tendue, l'extrémité mobile de la corde soit encore en quelque point B sur cet alignement. On plantera un jalon en B, puis, se transportant avec l'extrémité libre de la corde en un point D de manière qu'on trouve les trois points B, C, D, dans un même alignement, le point D appartiendra à la perpendiculaire AD (*fig.* 49).

TROISIÈME MOYEN. — En employant une équerre portative suffisamment grande. Supposons que l'on

ait un triangle formé de trois cordes ou de trois tringles dont les longueurs soient de 3, 4 et 5 unités. On applique l'un des deux petits côtés en AB, de manière que le point de réunion des côtés 3 et 4 soit au point donné A; le second côté AC est la direction de la perpendiculaire demandée (*fig.* 50).

QUATRIÈME MOYEN. — En faisant usage de l'équerre d'arpenteur ou de l'équerre octogone. On place l'instrument au point où l'on veut élever une perpendiculaire : on le tourne de manière qu'on puisse voir par les fentes qui sont à l'extrémité d'un diamètre deux jalons placés dans l'alignement donné; puis, visant par les fentes qui sont aux extrémités d'un diamètre perpendiculaire au premier, on fait placer un jalon en quelque point C sur le rayon visuel, et les points A et C sont sur l'alignement de la perpendiculaire demandée (*fig.* 51).

82. TROISIÈME QUESTION. — Trouver le milieu d'une droite donnée AB.

SOLUTION. *Premier cas.* — Si la ligne n'est pas fort grande, on tendra une corde de A en B, on rapportera l'une des extrémités sur l'autre, on tendra la corde double, en restant toujours sur l'alignement AB, et le point C sera le point cherché (*fig.* 52). On le vérifiera en reportant la corde ployée sur l'autre moitié BC. *Deuxième cas.* Si la droite est trop grande pour que l'on puisse commodément employer ce moyen, on mesurera avec un instru-

ment, avec le mètre par exemple, la longueur de A en B, on en portera la moitié de A en C sur l'alignement donné, on aura le point cherché. On vérifiera encore ce point en mesurant aussi CB.

83. QUATRIÈME QUESTION. — Mener une perpendiculaire sur le milieu d'une droite.

SOLUTION. — Soit AB la droite sur le milieu de laquelle on veut élever une perpendiculaire.

PREMIER MOYEN. — On pourra déterminer le milieu C de la ligne comme dans la question précédente, puis, par un des moyens déjà donnés, mener la perpendiculaire demandée.

DEUXIÈME MOYEN. — Si la ligne AB n'est pas fort grande, on prendra deux cordes égales, on les fixera par l'une de leurs extrémités aux points A et B; on réunira les extrémités libres, et l'on tendra ces cordes, en s'éloignant de la droite AB; on piquetera le point D de réunion des cordes tendues que nous supposons au-delà de la ligne AB; on tendra les mêmes cordes en-deçà, et l'on marquera le sommet F de l'angle formé par ces cordes: les deux points D et F détermineront la perpendiculaire DCF demandée (*fig.* 53).

PREMIÈRE REMARQUE. — S'il était peu commode de répéter en-deçà de la droite AB la construction qu'on a faite au-delà, on prendrait de nouveau deux cordes égales, mais différentes des premières; on les réunirait encore en un certain point E, qui, avec le

point D, déterminerait la perpendiculaire cherchée.

REMARQUE DEUXIÈME. — La construction qui vient d'être indiquée comme second moyen est une méthode de déterminer le milieu d'une droite donnée AB ; on a AC = CB.

84. CINQUIÈME QUESTION. — Par un point donné hors d'une droite sur un plan de peu d'étendue, mener une perpendiculaire à cette droite.

PREMIER MOYEN. — En employant la règle et le compas, lorsque la ligne donnée se prolonge de chaque côté du pied de la perpendiculaire. Du point donné A, avec un rayon pris à volonté, mais assez grand pour rencontrer la ligne donnée, on décrit un arc de cercle qui rencontre cette droite en deux points C et D; puis de chacun de ces points comme centre, et avec un rayon quelconque, plus grand que la moitié de la distance CD, on décrit des arcs de cercle *mn*, *ps*, qui se coupent en un point O, soit au-dessus, soit au-dessous de la ligne donnée, et la droite AB est la perpendiculaire demandée (*fig.* 54).

DEUXIÈME MOYEN. — En employant la règle et le compas, lorsque le point donné A est fort près du bord de la feuille de dessin. Par le point donné A on mène une droite quelconque AB, qui coupe la droite donnée en un point B. On cherche le milieu C de cette droite AB, et du point C comme centre, avec un rayon égal à CB, on décrit un arc de cercle qui coupe la droite donnée en un second

point O, et la droite OA est la perpendiculaire demandée (*fig.* 55).

TROISIÈME et QUATRIÈME MOYEN. — En faisant usage de la règle et de l'équerre. On peut faire usage de la règle et de l'équerre en assujettissant un côté de l'angle droit de l'équerre à passer par le point donné, comme lorsque ce point est sur la droite à laquelle on élève une perpendiculaire (*fig.* 46 et 47).

85. SIXIÈME QUESTION. — Par un point donné hors d'une droite sur le terrain, ou sur un plan de grande étendue, mener une perpendiculaire à cette droite.

PREMIER MOYEN. — En employant une corde lorsque la droite se prolonge de chaque côté du pied de la perpendiculaire. On fixera une corde au point donné D (*fig.* 53). On marquera par des piquets les deux points A, B, où aboutit l'autre extrémité de la corde tendue dans ces deux positions, ou bien on fera simultanément usage de deux cordes égales fixées toutes deux en D; puis, fixant aux deux points A et B les deux mêmes cordes ou deux autres cordes égales et tendues, l'on marquera leur point de rencontre F qui appartient à la perpendiculaire DF.

DEUXIÈME MOYEN. — En employant une corde, lorsque le point donné est tellement placé que le pied de la perpendiculaire doit se trouver très près de l'une des extrémités de la droite donnée. On

prendra une corde assez grande pour s'étendre du point donné D à un point B de la droite donnée (*fig.* 49). On en marquera le milieu C par un nœud; la corde étant tendue de D en B, on marquera le point C par un piquet, puis abandonnant le point D, on transportera cette extrémité de la corde en tournant sur le point C, jusqu'à ce que la corde étant toujours tendue, l'extrémité qui était en D se retrouve sur un point A de la ligne donnée. Le point A sera le pied de la perpendiculaire demandée.

TROISIÈME MOYEN. — En employant une équerre, soit en bois, soit en corde. Lorsqu'on a une équerre dont un des côtés de l'angle droit n'est pas plus petit que la distance du point donné à la droite donnée, on place cette équerre de manière qu'un des côtés de l'angle droit se trouvant sur la ligne donnée, l'autre côté de l'angle droit passe par le point donné, la droite AC (*fig.* 50), dirigée suivant ce côté, est la perpendiculaire demandée.

REMARQUE. — Si chaque côté de l'angle droit est plus petit que la perpendiculaire à mener, on place l'un des côtés de l'angle droit sur la ligne donnée; de manière qu'à vue d'œil la direction de l'autre côté de l'angle droit de l'équerre soit peu éloignée de la perpendiculaire qu'on veut mener par le point C; on promène ensuite l'équerre le long de la droite jusqu'à ce qu'on aperçoive le point C dans l'alignement, et l'on obtient ainsi la perpendiculaire demandée.

QUATRIÈME MOYEN. — En employant l'équerre d'arpenteur ou l'équerre octogone. On plante deux jalons B et A sur la ligne donnée, et un troisième au point C d'où la perpendiculaire CI doit être menée. On se promène avec l'instrument sur la ligne RS, et, pour reconnaître qu'on y est, il faut que, sans déranger l'instrument, on puisse, par deux pinnules ou fentes diamétralement opposées, voir le jalon B du point *m*, et le jalon A du point *n*. Quand, en satisfaisant à cette condition, on voit aussi le jalon C à travers les pinnules F et K, qui sont sur une ligne perpendiculaire à BA sur l'instrument, on en conclut que le point I où est placé le pied de l'équerre est le pied de la perpendiculaire demandée (*fig.* 56).

CHAPITRE X.

CONSTRUCTION DE LIGNES PARALLÈLES.

86. PREMIÈRE QUESTION. — Mener une parallèle à une droite donnée, lorsque l'on connaît seulement la distance entre les parallèles.

PREMIER MOYEN. — Par deux points C et D pris à volonté sur la droite donnée AB, on mènera les perpendiculaires indéfinies CE, DF (*fig.* 57), l'on prendra sur ces perpendiculaires des parties CE, DF, égales à la distance donnée, on mènera KI, ce sera la parallèle demandée.

DEUXIÈME MOYEN. — Par la tangente à deux arcs. Ce moyen n'est qu'approximatif. De deux points C et D pris à volonté sur AB et avec un rayon égal à la distance donnée, on décrira deux arcs de cercle *mn*, *rs*, on mènera à vue une droite KI tangente à ces deux arcs, ce sera la parallèle demandée (*fig.* 58).

REMARQUE. — Le premier moyen s'emploie très bien sur le papier et sur le terrain; le second ne réussit pas, si la distance entre les parallèles est fort grande.

87. DEUXIÈME QUESTION. — Par un point A donné sur une surface de peu d'étendue, mener une parallèle à la droite donnée AB.

PREMIER MOYEN. — En menant deux perpendiculaires. On mènera d'abord par le point E donné une perpendiculaire EC à la droite AB (*fig.* 57); puis, par un point quelconque de cette ligne, on lui élèvera une seconde perpendiculaire DF, qu'on prendra égale à EC; par les points E et F, on mènera la parallèle demandée KI.

DEUXIÈME MOYEN. — En décrivant des arcs de cercle.

Premièrement, du point A comme centre, avec un rayon pris aussi grand qu'on pourra, on décrira un arc de cercle indéfini qui coupera BC en un point C; du point C comme centre avec le même rayon, on décrira l'arc AB; on prendra une ouver-

ture de compas égale à la corde de l'arc AB, et du point C comme centre, avec ce rayon, on décrira un arc *mn*, qui coupera l'arc CD au point D; par les points A et D on mènera la droite AD, qui sera la parallèle demandée (*fig.* 59).

TROISIÈME MOYEN. — Méthode approximative par une tangente à un arc de cercle. Du point A on prendra la distance la plus courte AB du point donné A à la droite BC; on cherchera pour cela le rayon de l'arc *mn*, de manière que, décrit du point A comme centre, il soit tangent à BC; avec le même rayon, et d'un autre point C comme centre pris à volonté sur la droite donnée, on décrira un arc *rs*, on mènera une droite AD sensiblement tangente à l'arc *rs*: ce sera la parallèle demandée (*fig.* 60).

QUATRIÈME MOYEN. — Avec la règle et l'équerre. On appliquera l'un des côtés de l'équerre *mnp* le long de la droite donnée BC; on posera d'une manière fixe une règle PQ le long d'un second côté *mp*; on fera glisser l'équerre le long de cette règle, jusqu'à ce que le côté *mn*, transporté en *m'n'*, passe par le point A, et AD sera la parallèle demandée (*fig.* 61).

88. TROISIÈME QUESTION. — Par un point A donné sur le terrain, mener une parallèle à une droite donnée.

PREMIER et DEUXIÈME MOYEN. — On peut répéter les constructions indiquées comme premier et troi-

sième moyen de la question précédente; une corde tendue, tenant lieu d'un compas ouvert.

TROISIÈME MOYEN. — En transportant l'angle formé par la droite donnée avec une droite qui la coupe d'une manière quelconque. On tracera une droite KI qui coupe BC en un point quelconque *m*; on formera soit avec des cordes, soit avec des règles, un triangle *mnp*; on transportera ce triangle de manière que le sommet *m* soit placé au point A; on dirigera *mn* sur *m'*K, et la direction AD que prendra *m'p'* sera la direction de la parallèle A'D à BC (*fig.* 62).

REMARQUE sur la construction du triangle *mnp*. Le triangle *mnp* dont on vient d'indiquer la construction n'est autre chose que la fausse équerre *pmn* dont les côtés sont fixés par la traverse *np* placée à volonté.

QUATRIÈME MOYEN. — Par des transversales. Par le point A on mènera une droite quelconque AI qui coupe la droite BC en un point K; on prendra KI = KA; par le point I on mènera une droite quelconque IE qui coupe la droite BC en un point F, et l'on prendra FE = FI; le point E sera sur la parallèle demandée, il ne restera plus qu'à tracer la ligne AD (*fig.* 63).

REMARQUE. — Si le terrain ne permettait pas de planter un jalon à la distance KI=KA, on prendrait KI égal à une certaine partie de KA, par exemple à la moitié, au tiers, au quart; puis, après avoir mené

la droite quelconque IE, on prendrait FE égal à 2IF ou 3IF, ou 4IF. Ainsi, dans la *fig.* 64, ayant pris $KI = \frac{1}{2}AK$, on prendra $EF = 2IF$, et la droite AD sera la parallèle demandée.

89. QUATRIÈME QUESTION. — Par un point A donné hors d'une droite, mener sur le terrain une perpendiculaire à cette droite, en supposant qu'on n'ait ni équerre d'arpenteur, ni cordeau d'une longueur égale à la distance du point A à la droite donnée.

Par un point D pris à volonté sur PQ on mènera, par un des moyens connus, une perpendiculaire DF à la droite donnée; on jalonnera DF; on lui mènera par le point A une parallèle AI d'après la méthode qui vient d'être indiquée comme quatrième moyen. Cette parallèle AI sera la perpendiculaire demandée, on la jalonnera jusqu'à ce qu'elle rencontre PQ (*fig.* 65).

CHAPITRE XI.

ÉCHELLES.

90. *L'échelle* est en général une figure au moyen de laquelle on peut représenter des lignes par d'autres plus petites ou plus grandes, mais le plus souvent plus petites, et dans un rapport convenablement fixé.

On appelle échelles des parties décimales, celles qui donnent des parties sous-décuples les unes des

autres, comme des décamètres, des mètres, des décimètres, des centimètres, etc.

91. *Manière de déterminer les échelles par rapport aux grandeurs réelles.* — Quand on veut représenter, sur une feuille de dessin, les dimensions réelles d'un objet donné, on fixe le rapport entre les lignes du dessin et celles de l'objet à représenter, de manière à rendre aussi sensibles qu'on le pourra les parties à reconnaître. On prend tantôt le centimètre, tantôt un ou deux millimètres pour un mètre; cela dépend du plus ou du moins de détails que l'on a à représenter. Quand on veut représenter de très-petits objets en détail, on se forme une échelle dont les lignes sont plus grandes que celles des objets à représenter. Nous considérerons deux sortes d'échelles: l'échelle décimale simple, et l'échelle décimale composée.

92. PREMIÈRE QUESTION. — Construire l'échelle décimale simple.

Soit AB une droite prise pour représenter une unité de longueur sur le dessin, un mètre par exemple; on divisera AB en dix parties égales; on portera l'unité AB sur BC autant de fois qu'on le jugera utile. On écrira les nombres d'unités comme on le voit sur la figure, et l'échelle sera construite (*fig.* 66).

93. PREMIÈRE APPLICATION. — Prendre une longueur donnée, lorsque cette longueur est plus petite que l'échelle construite.

Prendre, par exemple, une longueur de $3^m,20$ sur l'échelle construite (*fig.* 66). On posera une pointe de compas au point 3, entre B et C, et la seconde au point 2, entre B et A, et la distance entre les deux pointes sera la longueur propre à représenter sur le dessin $3^m,20$.

94. DEUXIÈME APPLICATION. — Prendre une longueur donnée, lorsque cette longueur est plus grande que l'échelle construite.

Prendre sur l'échelle (*fig.* 66) une longueur de $6^m,20$, que l'on veut porter sur la ligne indéfinie MN (*fig.* 67). La longueur totale de BC étant de 4 mètres, on la portera sur MN autant de fois que 4 mètres sont contenus dans la longueur donnée, une fois dans le cas actuel de M en P; il reste encore $2^m,20$, qu'on prendra comme au n° **93**, et qu'on portera de P en Q : MQ sera la longueur demandée.

95. TROISIÈME APPLICATION. — La figure étant construite, évaluer la longueur d'une ligne plus petite que l'échelle.

Évaluer, par exemple, la longueur de la droite RS (*fig.* 68) au moyen de l'échelle (*fig.* 66). On prendra avec un compas la distance RS, et, plaçant l'une des pointes du compas sur l'une des divisions comprises entre B et C, de manière que l'autre pointe tombe entre B et A, si la première pointe est à la division 2 entre B et C, et l'autre en 8 entre B et A, on conclura que la longueur évaluée est de $2^m,80$.

96. QUATRIÈME APPLICATION. — Évaluer la longueur d'une ligne MQ (*fig.* 67) plus grande que l'échelle. On prendra la longueur AB de l'échelle donnée (*fig.* 66), on la portera sur MQ autant de fois qu'elle y sera contenue; supposons qu'elle y soit contenue six fois de M en R; on évaluera ensuite RQ comme dans la question précédente, et si cette longueur est de $0^m,20$, on en conclura que la longueur totale de MQ est de $6^m,20$.

97. *Échelle décimale composée.* — Cette échelle, qu'on appelle encore *échelle de dixmes*, donne trois sortes d'unités décuples les unes des autres; par exemple, les mètres, les décimètres et les centimètres.

DEUXIÈME QUESTION. — Construire l'échelle décimale composée.

Parallèlement à une droite donnée AC, et à égale distance les unes des autres, on mène dix droites, BD, FK, etc. On détermine la partie AI, qui représente une unité ou une dizaine d'unités; on la porte autant de fois qu'on juge convenable sur AC; on mène par les points de division des perpendiculaires à AC. On partage AI en dix parties égales; on en fait autant de AH. On place, sur les points de division de I en A, les nombres 0, 1, 2, 3,..., 9, 10, et sur les points de division de I en R, à commencer du premier point marqué après le point I, les nombres 1, 2, 3,..., 8, 9; à côté des points de division

de R en H on écrit aussi les nombres 1, 2, 3,...., 9, 10. On place encore sur la ligne AC les nombres 10, 20, 30,..., 60 ; et sur la ligne du milieu parallèle à AC, de distance en distance, le nombre 5. On joint le point extrême H avec le point de division de AI qui porte aussi le numéro 9. On joint ensemble, deux à deux, tous les autres points des droites HR, AI, par des lignes qui se trouvent ainsi toutes parallèles entre elles ; et l'échelle est construite (*fig.* 69).

98. PREMIÈRE APPLICATION. — Trouver, au moyen de l'échelle (*fig.* 69), une longueur de $26^{m},7$, en supposant que chacune des dix parties de AI représente un mètre.

On appliquera une pointe de compas au point qui se trouve sur la septième parallèle de AC et sur la perpendiculaire menée par le point de AC qui correspond à 20 mètres ; puis on ouvrira le compas jusqu'à ce qu'on puisse placer la seconde pointe sur la transversale qui joint le n° 7 de HR au n° 6 de AI ; la distance comprise entre les deux pointes de compas sera propre à représenter $26^{m},7$. Ainsi l'on voit que les dixaines d'unités sont indiquées par les nombres écrits sur la droite IC ; que les unités le sont sur les lignes AI, HR ; et que les dixièmes le sont sur la ligne IR ; ce nombre de dixièmes déterminant d'ailleurs sur quelle parallèle à AC il faut placer les pointes du compas.

99. SECONDE APPLICATION. — Trouver la longueur d'une ligne donnée plus petite que l'échelle donnée (*fig.* 69).

On prendra une ouverture de compas égale à la ligne donnée; on placera une des pointes du compas à l'un des points de division 10, 20, 30, etc., de la ligne AC, de manière que l'autre pointe se trouve entre A et I. Supposons que la première pointe se trouve ainsi placée au point 20; si l'autre tombe sur un des points de division de AI, en 6 par exemple, on en conclura que la ligne donnée est de 26 mètres. Mais si la seconde pointe tombe entre deux points de division, entre 6 et 7 par exemple, on transportera successivement le compas sur les parallèles qui sont au-dessus de CA, en laissant toujours une des pointes sur la droite à la division 20, jusqu'à ce que l'autre pointe tombe sur le point d'intersection de la transversale avec la parallèle. Soit donc la parallèle sur laquelle cette rencontre a lieu la septième, la distance entre les deux pointes de compas fera connaître que la ligne donnée est de 26,7 ou de $26^{m},70$.

REMARQUE. — Les particularités qu'offre l'usage de cette échelle n'étant relatives qu'aux parties sous-décuples pour lesquelles on est obligé d'avoir recours aux transversales contenues dans le rectangle AIRH, on se comportera comme dans la 2e et la 4e application, présentées dans la 1re question.

CHAPITRE XII.

CONSTRUCTION DE FIGURES SUR LE TERRAIN.

100. PREMIÈRE QUESTION. — Un côté d'un triangle étant donné sur le terrain, et la grandeur des deux autres étant connue, construire le triangle.

SOLUTION. Soient AB le côté donné sur le terrain, CD, EF les longueurs des deux autres côtés du triangle. *Premier cas.* Si ces côtés ne sont pas trop grands, on fixera en A l'extrémité d'une corde prise égale à CD; en B, l'extrémité d'une autre corde égale à EF. On joindra les deux bouts de ces cordes, et l'on s'écartera de AB jusqu'à ce que toutes deux soient tendues. Au point de réunion L de ces cordes, on plantera un piquet; ce sera le troisième sommet du triangle. Cela revient à décrire, quand on peut commodément le faire, deux arcs de cercle : l'un du point A comme centre, avec un rayon égal à CD; l'autre du point B comme centre, avec un rayon égal à EF; et à marquer le point L d'intersection de ces deux arcs comme le sommet demandé (*fig.* 70).

DEUXIÈME CAS. — Si les côtés donnés ont trop d'étendue pour être construits comme nous venons de l'indiquer, on pourra substituer aux trois côtés donnés trois lignes qui leur soient proportionnelles, qui en soient, par exemple, le $\frac{1}{4}$, le $\frac{1}{10}$; construire

en ACD un triangle par le moyen précédent; AD sera déjà dans l'alignement d'un des côtés; on construira le même triangle en BIP, et BI sera la direction du troisième côté. Au moyen des alignements AD, BI, on déterminera le point de rencontre L des droites AD, BI, et l'on aura le triangle demandé ALB (*fig.* 71).

PREMIÈRE REMARQUE. — On suppose qu'on sait si le sommet du triangle est au-delà ou en-deçà de AB, et lequel des deux côtés doit aboutir au point A.

DEUXIÈME REMARQUE. — Si l'on donnait le seul côté AB avec la condition que le triangle fût équilatéral, la construction serait la même, en observant que les côtés AL, BL doivent être égaux au côté piqueté AB.

101. DEUXIÈME QUESTION. — Tracer sur le terrain un triangle dont un côté est piqueté, un second côté devant être d'une longueur connue et comprendre avec le premier un angle donné.

SOLUTION. — Soit AB le côté piqueté, soit F l'angle dont le sommet doit être en A; on fera d'après l'une des méthodes données un angle égal à l'angle F, et, après avoir déterminé l'alignement AC, on mesurera une ligne AC égale au second côté donné soit sur le terrain comme DE ou en unités de longueur, par exemple en mètres. On tracera l'alignement CB, on aura le triangle demandé. Si l'angle était donné en degrés, il faudrait faire usage d'un instrument tel

qué le goniasmomètre, ou tout autre propre à mesurer les angles (*fig.* 72).

102. TROISIÈME QUESTION. — Un côté d'un triangle étant donné et les deux angles qui doivent lui être adjacents étant connus, construire le triangle.

SOLUTION. — Soit AB le côté piqueté; on formera en B et en A des alignements AC et BC, de manière à avoir les angles A et B égaux aux angles donnés. On déterminera le point de rencontre C de ces alignements, et ABC sera le triangle demandé (*fig.* 73).

103. QUATRIÈME QUESTION. — Tracer un carré dont le côté AB est donné et piqueté.

SOLUTION. — Par une des méthodes données, on mènera des perpendiculaires AD, BC, on mesurera des longueurs égales à AB; on tracera la ligne DC, on aura le carré demandé (*fig.* 74).

REMARQUE. — Après avoir mené la perpendiculaire AD au côté AB, on peut fixer en D et B les extrémités de deux cordes chacune égale à AB, puis les réunir en un point C qui sera le sommet du quatrième angle du carré.

104. CINQUIÈME QUESTION. — Tracer un rectangle dont un côté AB est piqueté et l'autre est donné et doit être égal à EF.

SOLUTION. — On formera encore en A et B des alignements perpendiculaires au côté AB; on prendra sur ces perpendiculaires des longueurs AD, BC

égales chacune à EF, on tracera DC, on aura le rectangle ABCD demandé (*fig.* 75).

105. SIXIÈME QUESTION. — Tracer un parallélogramme dont un côté AB est piqueté, l'autre côté est d'une grandeur donnée IK, et l'angle entre ces côtés doit être égal à l'angle M.

SOLUTION. — On formera en A un angle égal à l'angle donné M, et sur l'alignement AD, on mesurera AD = IK; par le point D on mènera une parallèle à AB, et par le point B une parallèle à AD; le point d'intersection de ces deux alignements sera le quatrième sommet du parallélogramme demandé (*fig.* 76).

PREMIÈRE REMARQUE. — Si la longueur des côtés n'est pas trop considérable, on fixera en D une corde d'une longueur égale à AB, et en B une corde égale à AD; le point de réunion des deux autres bouts de ces deux cordes tendues déterminera le point C, sommet opposé au sommet A. Cette remarque s'applique au rectangle.

Autrement on déterminera le milieu O de BD, et, sur le prolongement de AO, on prendra OC égal à OA; le point C sera le sommet cherché.

SECONDE REMARQUE. — On construirait de même un losange, si l'angle M étant donné, les deux autres côtés contigus AB, AD, devaient être égaux.

106. SEPTIÈME QUESTION. — Tracer un hexagone régulier dont un côté AB est piqueté.

SOLUTION. — On construira un triangle équilatéral AOB sur le côté piqueté AB ; on fera cette construction sur la partie du terrain qui doit contenir l'hexagone. On construira ensuite, sur les côtés AO, BO, de nouveaux triangles équilatéraux AOF, OBC, puis sur FO et OC, les triangles FOE, DOC; on joindra le point E au point D par une droite ED, qui devra être égale à EO si la construction est bien faite (*fig.* 77).

REMARQUE. — Si l'on peut aisément tracer un cercle, on déterminera le sommet O du triangle équilatéral ABO ; du point O comme centre, avec un rayon égal à OB ou AB, on décrira une circonférence de cercle ; on portera la longueur AB six fois de suite comme corde sur cette circonférence, en décrivant du point B, avec la longueur AB, un arc qui coupe la circonférence en C, et déterminant successivement, de la même manière, les points D, E, F, si la construction est bien faite, la circonférence doit être complétement soutendue par ces six cordes.

107. HUITIÈME QUESTION. — Tracer un polygone irrégulier dont un côté est piqueté ; les diagonales et les autres côtés étant indiqués sur un plan.

SOLUTION. — Soient AB le côté piqueté, ABCDE le plan coté sur AB dont la longueur effective est de 22 mètres. On construira un triangle dont les deux autres côtés soient respectivement de 31 mètres et

de 11 mètres, comme l'indique le plan; puis sur AC on formera le triangle ADC du plan, avec les côtés AD, CD égaux à $36^{m},20$ et $26^{m},10$; enfin, sur AD et avec les côtés égaux à 26 mètres et à $28^{m},5$, comme l'indique le triangle AED du plan, on fera le triangle AED; on aura les sommets A, B, C, D, E du polygone demandé (*fig.* 78).

108. NEUVIÈME QUESTION. — Par trois points A, B, C, piquetés, faire passer une circonférence. On suppose que ces trois points ne sont pas en ligne droite, autrement le problème serait impossible.

SOLUTION. — On déterminera le milieu D, K des droites AB, BC qui joignent ces trois points de deux à deux; on mènera une perpendiculaire à la droite AB au point D; une autre à la droite BC au point K; on marquera le point de rencontre O de ces droites; ce sera le centre du cercle cherché. On tracera le cercle du point O comme centre et avec un rayon égal à la distance OA par la méthode indiquée précédemment, et l'on placera de distance en distance des piquets sur la circonférence (*fig.* 79).

REMARQUE. — Si la circonférence doit avoir un rayon trop grand pour être ainsi tracée, on pourra en chercher différents points avec un instrument propre à mesurer les angles comme le goniasmomètre, et l'on opérera ainsi : On se placera à l'un des points extrêmes A ou C, en A, par exemple; on prendra avec l'instrument l'angle BAC;

on se promènera sur le terrain en cherchant des points d'où, sous l'angle que donne à présent l'instrument, on puisse voir les points B, C; de sorte que si l'on se trouvait en E ou en I, c'est-à-dire si l'angle formé par l'instrument, et qu'on ne peut changer, se trouvait trop grand ou trop petit pour qu'on ne pût voir à la fois ces deux points, on se rapprocherait ou l'on s'éloignerait de AC, jusqu'à ce que l'on rencontrât un point E d'où l'on vît les deux points B et C, sous l'angle trouvé; ce sera un des points de la circonférence. On le piquetera et l'on pourra en déterminer ainsi successivement autant qu'on jugera indispensable d'en avoir.

CHAPITRE XIII.

DÉFINITIONS. — FIGURES DANS L'ESPACE.

109. *Manière de représenter un plan.* — On ne figure qu'une portion finie du plan, portion que l'on prend rectangulaire. On le représente en perspective sous la forme d'un parallélogramme ou d'un trapèze. On le nomme quelquefois par quatre lettres placées aux quatre sommets, plan ABCD, mais mieux par deux lettres placées à deux sommets opposés de la figure: plan AC, plan BD (*fig.* 80).

110. *Ligne perpendiculaire à un plan.* — Droite

qui est perpendiculaire à toutes celles qu'on mènerait par son pied dans le plan. Si une droite PQ est perpendiculaire à toutes les droites RS, TU, XY qu'on peut mener dans le plan AC par le point Q où cette droite rencontre le plan, PQ est perpendiculaire au plan AC (*fig.* 81).

111. *Pied de la perpendiculaire.* — Le point Q où la droite PQ, perpendiculaire au plan AC, le rencontre (*fig.* 81).

112. PRINCIPE. — Si une droite PQ est perpendiculaire à deux droites RS, TU, menées par son pied dans le plan AC, cette droite PQ est perpendiculaire au plan AC (*fig.* 81).

113. *Inclinaison de deux plans* ou *angle dièdre.* — Écartement plus ou moins grand de deux plans qui se rencontrent. Deux feuillets d'un livre, par exemple, peuvent être plus ou moins écartés l'un de l'autre, et leurs plans auront, à l'égard l'un de l'autre, une inclinaison plus grande ou plus petite, autrement feront un angle dièdre plus grand ou plus petit. Ainsi les plans AB, DC, qui se coupent suivant la droite AD, font un angle dont le sommet est l'arête AD (*fig.* 82).

114. *Intersection de deux plans.* — La ligne droite suivant laquelle deux plans se coupent, comme AD (*fig.* 82).

115. *Plan perpendiculaire à un autre.* — Plan qui

forme avec un autre deux angles dièdres égaux. Le plan PQ sera perpendiculaire au plan AB, s'il fait des angles égaux avec les parties PRDA, PRBC (*fig.* 83).

116. PRINCIPES. — 1° Si un plan PQ passe par une droite XY perpendiculaire à un second plan AB, ces deux plans seront perpendiculaires l'un à l'autre (*fig.* 83); 2° si deux plans AB, CD sont perpendiculaires à un troisième plan FG, leur intersection OI sera une droite perpendiculaire à ce troisième plan (*fig.* 84).

117. *Ligne parallèle à un plan.* — Droite qui ne peut rencontrer ce plan à quelque distance qu'on la prolonge.

118. PRINCIPE. — Une droite parallèle à un plan est également éloignée de ce plan dans tous ses points. Si la droite XY est parallèle au plan MN, les perpendiculaires AB, CD, EF au plan MN des points A, C, E pris à volonté sur cette droite seront toutes égales, et les pieds B, D, F seront sur une droite parallèle à XY (*fig.* 85).

119. *Plans parallèles.* — On nomme ainsi deux plans qui ne peuvent se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge.

120. PRINCIPE. — Deux plans parallèles sont partout également éloignés. Si un plan PQ est parallèle à un plan MN, et que des points A, B, C, pris à volonté sur le plan PQ, on mène les perpendicu-

laires AD, BE, CF, au plan MN, ces perpendiculaires seront toutes égales entre elles (*fig.* 86).

121. *Verticale.* — Direction du fil à plomb.

122. *Plan vertical.* — Plan qui passe par une verticale.

123. *Plan horizontal.* — Surface des eaux tranquilles, ou plan parallèle à une telle surface.

124. PRINCIPES. — 1°. Un plan horizontal et un plan vertical sont perpendiculaires l'un à l'autre.

2°. Deux droites, l'une horizontale et l'autre verticale, sont perpendiculaires l'une à l'autre.

CHAPITRE XIV.

NIVELLEMENT. NOTIONS GÉNÉRALES. DIFFÉRENTES SORTES DE NIVELLEMENTS. INSTRUMENTS POUR NIVELER.

125. *Objet du nivellement.* — L'objet du nivellement est de déterminer la position des points soit relativement à leur distance au centre de la terre, soit relativement à une horizontale donnée. On suppose ici que la terre est parfaitement sphérique. Les eaux de la mer, lorsqu'elles sont tranquilles, celles d'un étang dans le même cas, ont à leur surface la même courbure que celle de la terre; mais

dans une petite étendue, ces surfaces sont sensiblement planes. C'est ainsi que nous devons les considérer en parlant du niveau de deux points et du nivellement.

126. *Le niveau de maçon ou le niveau à perpendicule.* — Cet instrument se compose de deux branches, CP, CQ, égales et réunies sous un angle quelconque, et terminées en P et Q de manière que ces extrémités se trouvent sur un même plan. Une tringle AB, parallèle à la base PQ, assemble les deux côtés CP, CQ. Au milieu I de cette tringle est une petite coche ou un trait sur lequel doit tomber le fil à plomb, fixé au sommet C, lorsque la surface sur laquelle on pose la base PQ est horizontale (*fig.* 87 et 88).

127. *Position à donner au niveau.* — Quand on fait usage de cet instrument, on le place dans un plan à peu près vertical. Il y a des circonstances où l'on place le fil à plomb sur la coche I, c'est quand on doit renverser l'instrument pour s'en servir; alors le bout libre du fil auquel est suspendu le plomb doit passer sur le point C pour que la ligne PQ soit horizontale (*fig.* 87 et 88).

REMARQUE. — En faisant l'angle du sommet du niveau droit, on peut alors employer cet instrument comme une équerre.

128. *Le niveau à bulle d'air.* — C'est une boîte cylindrique en verre de 10 à 15 centimètres de lon-

gueur sur 2 à 3 centimètres de diamètre. Elle repose dans une autre boîte en cuivre dont la partie inférieure est plane et parallèle à l'axe du cylindre. La boîte de verre est remplie d'une liqueur colorée, esprit-de-vin ou autre, de manière à ce qu'il s'en manque de quelques gouttes, ce qui laisse une bulle d'air qui remonte toujours vers la partie la plus élevée de la boîte. Quand l'instrument est placé bien horizontalement, la bulle occupe le milieu de la partie supérieure du tube de verre, et se trouve exactement entre deux marques destinées à faire reconnaître que la base du niveau est horizontale, et que par conséquent la surface plane (règle ou planchette) sur laquelle repose cet instrument est aussi horizontale (*fig.* 89).

129. *Le niveau d'eau et le voyant.* — Le niveau d'eau se compose d'un tube ou tuyau cylindrique en cuivre ou en fer-blanc CABD. Ce tube est recourbé à ses deux extrémités AC, BD ; on fixe à chacune d'elles un petit tube ou fiole en verre CE, DF, et l'on a soin de luter les jointures, c'est-à-dire de les enduire d'une substance grasse qui ne laisse point échapper l'eau. Au milieu et à la partie inférieure de l'instrument est une douille GH qui s'applique à l'extrémité du pied IKLM composé de trois branches. On verse de l'eau dans une des fioles FD en quantité suffisante pour qu'elle monte dans les deux fioles à une certaine hauteur PR, et

les points P et R se trouvent sur la ligne horizontale de niveau (*fig.* 90). Le niveau d'eau ne s'emploie pas sans le voyant. Le voyant se compose de deux pièces : 1° d'une règle A'B' divisée en centimètres et même en parties plus petites ; 2° d'une autre règle mobile *ab* qui se place sur celle-là au moyen d'une rainure dans laquelle elle glisse ; vers l'une de ses extrémités est une planchette en bois ou en métal peinte de deux couleurs différentes et qui tranchent l'une sur l'autre, en sorte que la ligne de séparation XY est bien apparente. Cette planchette se nomme la mire, et la ligne XY la ligne de mire (*fig.* 91).

130. *Manière dont on dirige la mire.* — On élève ou l'on abaisse la mire *ab* en la faisant glisser le long de la règle A'B' jusqu'à ce que celui qui observe avec le niveau d'eau voie par les extrémités P et R de la surface de l'eau la ligne XY. Cette ligne horizontale PQR se nomme aussi ligne de mire, et chaque observation se nomme coup de niveau. Quand le coup de niveau est donné vers le point où l'on veut arriver, on l'appelle coup d'avant ; et quand on regarde vers le point de départ, on l'appelle coup d'arrière. A chaque observation, l'on tient compte de la hauteur de la ligne de mire XY au-dessus du terrain. Cette hauteur, qui se nomme cote, se compte sur la règle A'B' et sur la partie *av* de la règle *ab* comprise entre l'extrémité B' et la

ligne XY, lorsque la ligne de mire XY est au-dessus du point B'. Mais quand la cote cherchée doit être fort basse, et que la longueur de *av* ne permet pas de descendre assez bas la ligne XY, on renverse en mettant la partie *b* par en bas (*fig.* 91).

131. *Niveau vrai entre deux points.* — Deux points sont vraiment de niveau s'ils sont sur la même horizontale et à égale distance de la verticale qui détermine l'horizontale; ou encore s'ils se trouvent sur la surface des eaux tranquilles ou sur une parallèle à cette surface. Nous avons vu ci-dessus comment le niveau entre deux points est indiqué au moyen d'un niveau à perpendicule, d'un niveau à bulle d'air, ou d'un niveau d'eau.

132. *Niveau apparent.* — On dit communément que tous les points d'une droite FG perpendiculaire à une verticale CD sont de niveau, quoiqu'ils soient inégalement éloignés du point D de l'instrument par lequel passe la verticale qui détermine l'horizontale FG. Cela est sensiblement vrai quand cette différence n'est pas considérable; mais, à parler exactement, il n'y a pas alors niveau vrai, il y a seulement niveau apparent. Entre le pied de la verticale et une distance horizontale de 50 mètres, il y a $0^{m},0002$ de différence au niveau vrai, et cette différence augmenterait beaucoup plus sensiblement si cette distance devenait beaucoup plus grande (*fig.* 87 et 88).

Il est donc avantageux pour l'exactitude des opérations de placer le niveau dont on fait usage au milieu de l'espace qui sépare les deux points consécutifs entre lesquels on cherche la différence de niveau, lorsque cette distance est un peu considérable.

133. *Le nivellement est simple ou composé.* — Toutes les fois que, par une seule station, ou que d'un seul coup de niveau, on peut déterminer la différence de hauteur de deux points, cette détermination est du ressort du nivellement simple. Lorsque les deux points à niveler sont placés au-delà des limites de l'étendue du rayon visuel, ou bien lorsque le terrain présente beaucoup d'inégalités, ou une pente considérable, on est obligé de lier les deux termes du nivellement par une suite de nivellements simples, et c'est en cela que consiste le nivellement composé.

CHAPITRE XV.

NIVELLEMENTS FAITS AVEC LE NIVEAU A PERPENDICULE OU AVEC LE NIVEAU A BULLE D'AIR.

134. PREMIÈRE QUESTION. — Trouver sur la verticale FG le point qui est de niveau avec le point donné P. On posera sur le point P une règle PR dont les côtés PR, VS, soient parallèles. Cette

règle doit être assez forte pour ne pas fléchir sous son propre poids, ni sous celui du niveau ACBD qu'on posera dessus vers le milieu. On tiendra le niveau dans un plan sensiblement vertical, de manière que le fil CD puisse glisser librement le long de AB. On élèvera ou l'on abaissera l'extrémité R de la règle, jusqu'à ce que le fil à plomb se trouve sur le trait D du niveau, et le point R sous la règle sera le point cherché (*fig.* 92). Les points V et S, placés au-dessus de la règle, sont aussi de niveau; souvent ce sont les points que l'on considère de préférence.

135. Manière d'opérer quand les points P et R sont trop éloignés pour que la règle puisse aller de l'un à l'autre.

Dans ce cas on trace une ligne droite, soit avec une corde ou de toute autre manière; on nivelle une suite de points le long de cette ligne, jusqu'à ce que l'on soit arrivé à celui que l'on cherche (ce nivellement appartient au nivellement composé).

136. DEUXIÈME QUESTION. — Trouver la différence de niveau de deux points P et G.

Au point le plus bas G, on placera verticalement une règle ou un jalon. On posera la règle VS qui doit supporter le niveau sur le point P, et l'on fera glisser l'extrémité S le long de la verticale GF, jusqu'à ce que le niveau indique que la règle PR est dans une position horizontale: on mesurera

la distance verticale GR, ce sera la différence de niveau des deux points P et G et la cote du point G rapportée à la droite PR. Il est commode que la règle verticale GF porte des divisions sur lesquelles on prenne de suite la cote GR, sans avoir recours à une autre mesure (*fig.* 92).

NIVELLEMENT COMPOSÉ FAIT AVEC LE NIVEAU A PERPENDICULE.

137. TROISIÈME QUESTION. — Lever le profil d'une route (*fig.* 93).

On suppose que la ligne à parcourir de A en L est jalonnée ou tracée par des piquets. On nivellera de A en B, et sur le brouillon ou croquis du profil, on écrira la cote trouvée A*a* et la distance horizontale A*b*. Soient, par exemple, A*a* = $0^m,50$ et A*b* = $0^m,50$; si l'on trouve que la partie BC est horizontale, on mesurera cette distance = 1 mètre; puis donnant un coup de niveau en CD, on mesurera C*c* = $0^m,50$ et *c*D = $0^m,50$, et ainsi de suite jusqu'en L. On aura ainsi le moyen de construire le profil demandé.

Si l'on veut tout rapporter à l'horizontale A″L″, qui passe, par exemple, à 4 mètres au-dessus du point F, on ajoutera *c*E à FF′ = 4 mètres pour avoir EE′; à EE′ on ajoutera *d*D pour avoir DD′, et ainsi des autres cotes.

Pour trouver la différence de niveau entre les

points A et F, on fera deux sommes des cotes trouvées : l'une des cotes prises en montant C*c*, D*d*, E*e*; l'autre des cotes trouvées en descendant, et la différence de ces sommes sera la différence de niveau demandée.

COTES en MONTANT.	COTES en DESCENDANT.
C*c* = 0^m,50	
D*d* = 0^m,09	A*a* = 0^m,50
E*c* = 0^m,21	
0^m,80	
— 0^m,50	
Différence $0,^m30$	

On trouve d'après les cotes données sur la figure, que la somme des cotes prises en montant surpasse de 0^m,30 la somme des cotes prises en descendant, d'où l'on conclut que le point F est plus élevé que le point A de 0^m,30; le point le plus élevé répondant toujours à la plus faible des deux sommes. Ces sommes correspondent à celles que, dans le nivellement fait avec le niveau d'eau, on appelle somme des coups d'arrière et somme des coups d'avant.

CHAPITRE XVI.

NIVELLEMENT SIMPLE AVEC LE NIVEAU D'EAU.

138. PREMIÈRE QUESTION. — Déterminer la différence de niveau des deux points A et B accessibles.

Placez le niveau CP à peu près à égale distance de A et B, le point de station P pouvant être pris sans inconvénient hors de la droite *ab*, et faites placer la mire verticalement au point A. Puis, par un signe convenu, faites monter ou descendre la ligne de mire jusqu'à ce que le rayon visuel *ca*, rasant les surfaces de l'eau du niveau, aboutisse à cette ligne; et lorsque l'on aura remarqué sur la règle AM la hauteur A*a* ou la cote du point A, on l'écrira sur le brouillon du nivellement. Sans déranger le pied de l'instrument, et sans perdre de temps, faites transporter la mire au point B, et répétez la même opération que pour le point A, afin d'avoir la hauteur B*b* ou la cote du point B, que vous écrirez aussi sur le brouillon pour la retrouver au besoin (*fig.* 94).

Soient pour exemples $Aa = 1^m,536$; $Bb = 0^m,95$. On voit par ces cotes inégales que les deux points A et B ne sont pas de niveau, et qu'au contraire le point A est plus bas que le point B de la quantité $Aa - Bb = 1^m,536 - 0^m,95 = 0^m,586$. En général le point le plus bas est évidemment celui qui a la plus forte cote.

REMARQUE. — Afin de voir plus nettement les surfaces de l'eau, il faut se mettre à une petite distance d'une des fioles, pointer d'un œil seulement, et de manière que le rayon visuel soit tangent aux deux fioles.

139. DEUXIÈME QUESTION. — Lever le profil d'un terrain.

Quand le terrain est inégal entre les points A, B, et qu'il est utile d'en connaître la forme ou profil, comme lorsqu'il s'agit de lever le profil d'une route, l'on fait placer successivement la mire aux points A, C, D, E, B, pour en avoir les cotes, et l'on mesure en outre la hauteur Po de l'instrument, supposé placé sur la droite *ab*, et à peu près à son milieu. Enfin l'on mesure les distances horizontales *ac*, *cd*, *do*, *oe*, *eb* (*fig.* 95). Il est d'usage de faire ces distances égales entre elles, lorsque cela est possible, lorsque le terrain est légèrement ondulé, et que les différentes pentes se raccordent par des lignes d'une faible courbure.

REMARQUE. — Le levé d'un profil étant fait, on le rapporte à l'échelle adoptée; mais quand les cotes ou ordonnées verticales sont fort petites par rapport aux distances horizontales, on les augmente toutes de la même quantité, afin que l'espace entre la ligne horizontale *ab*, et celle ACDPEB qui représente le terrain, permette d'écrire plus aisément les hauteurs dont il s'agit. C'est aussi par cette raison et pour ren-

dre les pentes plus sensibles à l'œil, que l'on rapporte souvent ces hauteurs à une échelle plus grande que celle dont on fait usage pour fixer les longueurs horizontales.

CHAPITRE XVII.

NIVELLEMENT COMPOSÉ AVEC LE NIVEAU D'EAU.

140. On peut réduire à trois circonstances principales celles qui se rencontrent dans le nivellement composé.

1°. On peut avoir uniquement besoin de connaître la différence de niveau entre les deux termes extrêmes du nivellement, sans avoir besoin de rien conserver des opérations intermédiaires. Dans ce cas la ligne à parcourir pour effectuer le nivellement est arbitraire. On la choisit de manière que les opérations s'exécutent aussi commodément et aussi promptement que possible.

2°. On peut avoir besoin de connaître les différents points d'une ligne donnée sur le terrain; alors on conserve toutes les cotes trouvées sur cette ligne. Ce nivellement est ordinairement précédé d'un levé du terrain sur lequel on marque par des piquets enfoncés à fleur de terre la ligne à parcourir, et les points dont on veut avoir les cotes. Si ce levé n'existe pas, on mesure chaque distance entre deux points

successifs dont on cherche la différence de niveau, et l'on prend soigneusement les angles que forment les rayons visuels dans les stations successives.

3°. On peut se proposer de tracer sur un terrain montueux une ligne qui soit horizontale, ou qui s'élève en suivant une loi donnée, comme lorsqu'on veut pratiquer un chemin par lequel on puisse parvenir facilement au sommet.

141. PREMIÈRE QUESTION. — Trouver la différence de niveau des deux points extrêmes A et Z, et figurer la ligne ABCDEFZ tracée sur le terrain.

La méthode à suivre pour résoudre cette question comprend quatre parties :

1°. La suite des observations à faire avec le niveau ;

2°. Le relevé du nivellement pour connaître la différence de niveau entre les deux termes extrêmes ;

3°. La vérification du nivellement, ou le nivellement réciproque ;

4°. Le mis au net.

142. 1°. *Observations avec le niveau.* — Soient B, C, D, E, F, les points les plus élevés ou les plus bas du terrain entre les points extrêmes A et Z, et pris tels que les inégalités du terrain entre deux d'entre eux soient peu sensibles. En plaçant le niveau entre A et B vers le milieu de la distance qui sépare ces deux points, on donnera un coup de niveau d'ar-

rière vers le point a; on écrira la cote trouvée sur le brouillon. On donnera un coup de niveau d'avant sur le point b; on écrira cette seconde cote. On transportera le niveau vers le milieu de BC pour y faire la seconde station, et deux observations sur les points b et c, comme dans le cas précédent (*fig.* 96).

143. 2°. *Relevé du nivellement.* — On fait séparément la somme des coups d'arrière et celle des coups d'avant. On soustrait la plus petite des deux sommes de l'autre, et la différence exprime la différence de niveau des deux points extrêmes A et Z; et le point A de départ est plus bas ou plus haut que le point Z d'arrière, selon que la somme des coups d'arrière est plus grande ou plus petite que la somme des coups d'avant. On trouve d'après les cotes supposées au relevé :

RELEVÉ DES COTES.

COUPS D'ARRIÈRE.		m	COUPS D'AVANT.		m
Aa	=	2,126	Bb	=	1,948
Bb'	=	2,360	Cc	=	2,445
Cc'	=	1,588	Dd	=	0,500
Dd'	=	2,367	Ee	=	0,868
Ee'	=	1,544	Ff	=	1,100
Ff'	=	0,354	Zg	=	0,785
Somme..		10,339	Somme...		7,646

Somme des coups d'arrière.... $10^m,339$
Somme des coups d'avant..... $7^m,646$
Différence.... $2^m,693$

144. 3°. *La vérification du nivellement.* — Cette vérification se fait en recommençant toutes les opérations, en partant du point Z pour retourner en A. C'est en cela que consiste le nivellement réciproque. Celui-ci doit conduire au même résultat que le nivellement direct. Lorsque les deux résultats ne diffèrent entre eux que d'une très-petite quantité, on prend pour résultat leur demi-somme, si aucune raison n'engage à adopter l'une de préférence à l'autre.

145. 4°. *Mis au net.* — Pour faire le mis au net du nivellement, on rapporte tous les points du terrain à une même ligne horizontale XX' passant au-dessus du point le plus élevé; pour cela on augmente convenablement toutes les cotes de hauteur de 10 ou 20 mètres, par exemple.

146. DEUXIÈME QUESTION. — Tracer une ligne horizontale sur le contour d'une montagne :

Soient ABCI un mamelon dont la base, dans la plaine, soit terminée par la courbe DEFGH; R le point donné par lequel doit passer la courbe horizontale; ayant remarqué la ligne *ll'* de la pente qui correspond à quelque sinuosité observée, suivant laquelle on veut trouver un point, on remettra le voyant au porteur de cet instrument, après avoir placé la mire de manière que la ligne de mire soit à la hauteur de la ligne du niveau de l'eau que contient l'instrument placé en R. Le porteur de l'instrument se pro-

mènera suivant ll', en plaçant verticalement le voyant sans rien déranger, jusqu'à ce que l'observateur qui est au point R lui fasse signe de s'arrêter. Supposons que le voyant se trouvant en L (*fig.* 97), la ligne de mire soit sur le rayon visuel déterminé par la ligne de niveau, on en conclura que le point L est sur la ligne de niveau du point R. Pour les points suivants, pour le point M, par exemple, on passera du point L au point M, comme on est venu du point R au point L. On continuera jusqu'à ce qu'on revienne au point R de départ. On sera assuré que l'opération est bien faite, si le voyant replacé en R sans que la mire ait été dérangée, la ligne de mire est encore sur la ligne de niveau de la dernière station. Ceci diffère peu de la vérité, quand le contour n'est pas d'une trop grande étendue. On pourrait parvenir à un résultat plus rigoureusement exact, si l'on plaçait chaque fois le niveau au milieu de la distance qui sépare le point observé du point à observer.

Afin de pouvoir faire le mis au net du nivellement, il faut avoir soin de mesurer les distances RL, LM, MN, etc., et les angles que ces droites forment entre elles et avec le méridien magnétique.

147. *Manière de rapporter les résultats sur le plan. Rédaction du registre de nivellement.* — Nous nous sommes occupés dans les chapitres qui précèdent de trouver les différences de niveau d'un

point à un autre, soit par une seule station, soit par plusieurs stations. Nous nous proposons actuellement de trouver la hauteur des points A, B, C, D, etc. (*fig.* 98) d'un terrain au-dessus ou au-dessous d'un plan horizontal donné, de manière qu'en retranchant l'une de l'autre les deux cotes de deux de ces points, on ait leur différence de niveau.

148. *Plan général de comparaison. Cote.* — On nomme ainsi un plan horizontal dont on fait choix ; on suppose qu'il passe à une certaine hauteur au-dessus du plus élevé des points à niveler, et l'on cherche la longueur de la verticale comprise entre ce plan et chaque point soumis au nivellement. Cette longueur est la cote du point par rapport au plan donné, ou autrement c'est la cote générale de ce point.

149. *Notation des cotes sur le plan du terrain.* — Soit A (*fig.* 98) le point le plus élevé des points à niveler sur le terrain XYZT, ou au moins un point remarquable, et qui ne soit pas dans le cas de changer aisément de niveau, tel que l'angle du cordon d'un bâtiment, le sommet d'une tour, etc. ; faisons passer le plan général de comparaison à 10 mètres au-dessus du point A, la cote de ce point sera 10 mètres. Si le point B se trouve à $1^{m},50$ au-dessous du même plan, sa cote sera $11^{m},50$ et ainsi de suite. On écrira ces cotes, entre parenthèses, sur le plan du terrain. Alors si l'on veut avoir la différence

de niveau entre A et B, on ôtera 10^m de $11^m,50$, on aura $1^m,50$.

150. TROISIÈME QUESTION. — Trouver les cotes B, C, D par rapport au plan général de comparaison qui passe à 10 mètres au-dessus du point fixe A.

SOLUTION. — On établira le niveau en un point fixe L (*fig.* 98), choisi de manière à voir le plus grand nombre de points possible; on visera d'abord vers le point donné A, et l'on prendra, avec le voyant, la hauteur de ce point au-dessous du plan de niveau particulier qui passe par la surface de l'eau du niveau établi au point L, ou sa cote relative à ce plan. Soit $2^m,50$ cette cote, on l'écrira à la quatrième colonne du registre de nivellement dont on a le modèle dans le tableau ci-joint. On cotera ensuite cette hauteur à 10^m, cote générale du point A, et l'on aura $7^m,50$ pour la cote générale, ou pour la distance au plan général de comparaison du plan de niveau qui passe par la surface de l'eau du niveau établi en L. On visera ensuite vers le point B: soit 3^m sa cote au-dessous du plan de niveau L, il s'ensuit que B est au-dessous du plan de comparaison de 3^m plus $7^m,50$, ou $10^m,50$; on écrira donc 3^m à la quatrième colonne du registre et $10^m,50$ à la cinquième. De même, si l'on trouve pour la cote particulière du point C $4^m,70$, on écrira ce nombre dans la quatrième colonne, on l'ajoutera à $7^m,50$,

et l'on aura $12^{m},20$ pour la cote du point C. Il en sera de même pour les autres points qu'on pourra apercevoir du point L.

STATIONS.	COTES du niveau de la STATION.	POINTS NIVELÉS.	COTES DES POINTS NIVELÉS, RAPPORTÉS au niveau de la STATION.	COTES DES POINTS NIVELÉS, RAPPORTÉS au plan général de COMPARAISON.	INDICATION des REPÈRES.
1	2	3	4	5	6
1re station en L.	$7^{m},50$	A	$2^{m},50$	$10^{m},00$	repère.
		B	3 ,00	10 ,50	
		C	4 ,70	12 ,20	repère.
2e station en L′.	$11^{m},10$	C	$1^{m},10$	$12^{m},20$	repère.
		A′	3 ,40	14 ,50	repère.
		B′	2 ,00	13 ,10	
		C′	1 ,60	12 ,70	
3e station en L″.	$13^{m},00$	A′	$1^{m},50$	$14^{m},50$	repère.
		A″	— 2 ,00	11 ,00	
		B″	1 ,00	14 ,00	

151. QUATRIÈME QUESTION. — Continuer le nivellement précédent, et chercher les cotes des points A, B, C, qu'on ne peut voir du point L.

SOLUTION. — On transportera le niveau en un point L′, qu'on choisira de manière à voir plusieurs de ces points, ou au moins l'un de ceux qu'on a déjà nivelés, le point C par exemple. Ce point s'appelle un

repère, et on l'indique dans la sixième colonne; il sert à lier les points nivelés dans la première station à ceux de la seconde. On cherchera donc la cote du point C par rapport au plan de niveau L′ : supposons qu'elle soit de $1^m,10$; on l'écrira dans la quatrième colonne; et, comme la cote générale du point C est de $12^m,20$, il s'ensuit que le plan du niveau en L′ sera au-dessous du plan de comparaison de $12^m,20 - 1^m,10$, ou de $11^m,10$, que l'on écrira dans la deuxième colonne. On prendra ensuite les cotes des points A′, B′, C′ relatives au plan de niveau L′. Soient ces cotes $= 3^m,40$; $2^m,00$; $1^m,60$; on les écrira dans la quatrième colonne, et en les ajoutant à la cote du plan de niveau $11^m,10$, on aura les cotes $14^m,50$; $13^m,10$; $12^m,70$, rapportées au plan général de comparaison : on les écrira dans la cinquième colonne. S'il y a des points à niveler qu'on ne puisse voir des stations L et L′, on portera le niveau en un point L″ d'où l'on puisse voir un des points nivelés précédemment, et l'on continuera l'opération comme ci-dessus.

152. CINQUIÈME QUESTION. — Indiquer les cotes lorsque les points à niveler sont au-dessus du plan de niveau de la station.

SOLUTION. — Supposons que le point A″ (*fig.* 98) soit plus élevé que le plan de niveau L″; dans ce cas, si l'on peut abaisser la mire comme dans la *fig.* 99, où il s'agit d'avoir la cote du sommet A du mur AB,

on l'abaisse jusqu'à ce que la ligne de mire soit dans le plan de niveau. On prend la hauteur AB′, que je suppose de 2 mètres, et on l'écrit dans la quatrième colonne avec le signe —, qui indique qu'on doit diminuer de 2 mètres la hauteur du plan de niveau L″, au lieu de l'augmenter, pour avoir la cote générale du point A″ par rapport au plan de comparaison, et l'on écrit la différence 11 mètres dans la cinquième colonne.

REMARQUE. — Lorsqu'on veut faire le projet d'une route, on commence par niveler, en suivant la méthode qui vient d'être indiquée, tout le terrain sur lequel on doit l'établir, et notamment les points où doivent être les angles formés par les différentes lignes qui la composent. On écrit les cotes en noir sur le plan, on les renferme entre parenthèses; ensuite on trace le projet; et quand on a calculé la hauteur de tous les points de la route qui correspondent à ceux du terrain dont on a déjà les cotes, on écrit les cotes générales de la route à côté de celles du terrain, mais avec une encre de couleur rouge. Alors la différence entre les deux cotes d'un même point donne la hauteur que la route aura en ce point au-dessus ou au-dessous du terrain, et la quantité dont il faudra le déblayer ou le remblayer.

CHAPITRE XVIII.

DES LEVÉS. — PROJECTIONS, PLANS, PROFILS, COUPES, ÉLÉVATIONS, DÉFINITIONS ET PRINCIPES.

153. *Projection d'un point sur un plan.* — C'est le pied de la perpendiculaire menée de ce point sur le plan qu'on appelle *plan de projection.* Soient AB un plan horizontal, AC un plan vertical; M un point donné entre ces deux plans; MP une perpendiculaire au plan horizontal; MI une perpendiculaire au plan vertical; le point P est la projection verticale du même point (*fig.* 100).

Si une droite MN (*fig.* 101) est donnée comme on voudra entre les plans AB, AC, et que par cette droite on fasse passer deux plans, l'un MNRP perpendiculaire au plan horizontal, l'autre MNLI perpendiculaire au plan vertical, les intersections PR, LI de ces plans projetants, avec les plans de projection AB, AC, seront les projections horizontales et verticales de cette droite.

REMARQUE. — La projection d'une droite limitée MN est la droite déterminée et limitée par les pieds des perpendiculaires menées des extrémités M et N sur les plans; on obtient ainsi LI et PR pour les projections de cette droite.

154. *Plans.* — Le plan d'un corps ou d'un édifice est la représentation de la section faite dans ce corps ou cet édifice par un plan horizontal connu. Ainsi,

pour avoir le plan d'un bâtiment, on conçoit un plan qui passe à environ un décimètre au-dessus des tablettes des fenêtres; le plan est supposé transparent, et l'on y représente tout ce que l'œil peut apercevoir, tant dans le plan qu'au-dessous, l'œil se promenant partout au-dessus du plan, et les rayons visuels étant toujours dirigés perpendiculairement au plan. Le tracé qu'on obtient ainsi s'appelle la projection horizontale, ou simplement le plan de l'objet à représenter. On figure par des traits pleins les lignes ou les arêtes qu'on peut voir, et par des lignes différemment ponctuées celles qui sont cachées par le massif du corps et que l'œil ne peut apercevoir; ou encore des lignes de simple construction pour lier les parties de dessin.

Les lignes parallèles au plan de projection ou situées dans ce plan, y sont représentées proportionnellement à leur grandeur; celles qui sont inclinées au plan y sont représentées par des lignes plus courtes.

155. Les *fig.* 102, 103, 104, 105, 106, 107 sont relatives à la description d'un même bâtiment. Les *fig.* 102 et 104 représentent les plans du rez-de-chaussée et du premier étage de ce bâtiment; ils sont menés à la hauteur XV, ZY, indiquée dans la *fig.* 106.

156. PROFIL. — On appelle ainsi la figure d'une section faite par un plan vertical suivant une direction déterminée. On doit y représenter toutes les intersections de ce plan avec les faces du solide qu'il

que l'on met plus ou moins d'importance à en bien connaître les détails.

DES LEVÉS ET DU RAPPORT SUR LE PAPIER.

159. *Travail préparatoire pour un levé quelconque. Application aux levés de bâtiment.* — Lorsqu'on a le projet de faire un plan, une coupe, un profil, une élévation ou plusieurs de ces descriptions à la fois, il faut, avant tout, faire le croquis ou le brouillon de ce que l'on veut représenter, et séparément pour chacune de ses parties.

160. *Croquis.* — Le croquis est un dessin fait à vue, contenant les lignes que l'on se propose de rapporter sur un dessin soigné que l'on appelle le mis au net ou la rédaction du plan. Il faut, autant que possible, faire le croquis à l'encre, ou au moins, si on l'a fait au crayon, passer ensuite les traits et les écritures à l'encre. Voyez par exemple *fig.* 101; c'est le croquis du rez-de-chaussée du bâtiment auquel les *fig.* 102, 103, 104, 105, 106 sont relatives. La *fig.* 102 offre la rédaction ou le mis au net du même plan.

Le croquis se fait dans des dimensions aussi grandes que le permet la feuille qu'on emploie. On écrit près de chaque ligne la longueur trouvée, et dans les angles qu'on a pu mesurer, le nombre de degrés qu'ils contiennent; s'il peut y avoir de l'incertitude ou confusion relativement à une ligne à laquelle convient une longueur écrite, il faut désigner cette

ligne par des lettres, et tenir sur le dessin ou sur une feuille supplémentaire, registre des dimensions observées. Ce premier dessin et les notes qui s'y rattachent ne doivent jamais être égarés tant qu'on peut avoir des détails à reprendre pour le mis au net. C'est la pièce qui fait foi; elle sert même encore pour la vérification, quand tout est censé fini. On doit avoir soin de bien désigner l'objet de chaque partie du dessin, le sens et le lieu de chaque coupe, pour n'être pas embarrassé lors de la rédaction.

Pour lever un appartement régulier, on prend les côtés et les diagonales; la construction de l'épure donne par-là le moyen de vérifier si toutes les dimensions sont bien prises. Si la pièce est irrégulière, on la décompose en quadrilatères, en triangles, dont on mesure les côtés et les diagonales, autant qu'aucun obstacle ne s'y oppose. S'il n'y a que quelques parties dont on n'ait pas les données nécessaires à la construction, les parties adjacentes, offrant des moyens de vérification, fournissent aussi le moyen de vérifier les premières quand on cherche à les raccorder.

Quand on veut que le levé soit bien exact, il faut que les lignes horizontales soient nivelées en même temps qu'on les mesure; que les lignes verticales soient mesurées le long de la ligne indiquée par la direction du fil à plomb. Les mesures prises avec un cordeau tendu, évaluées en détail, peuvent être inexactes; il faut, autant que cela se peut, mesurer

avec des règles, double mètre ou quadruple mètre, en se dirigeant, pour plus d'exactitude, le long d'une corde tendue. S'il y a des murs dont on ne puisse mesurer l'épaisseur, on détermine soigneusement le plan des contours extérieurs et intérieurs, et les épaisseurs visibles; la différence des tracés fait connaître les épaisseurs cherchées.

161. *Levé au mètre d'un terrain* ou *d'une étendue peu considérable de bâtiments.* — Pour lever une suite de bâtiments, cours, jardins, on renferme, s'il se peut, tous ces objets dans un polygone dont on détermine exactement les angles et les côtés. Si l'on peut mesurer les diagonales, on n'a pas besoin des angles; mais en prenant tous ces éléments, on a le moyen de vérifier les observations et la construction. Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait à prendre l'ensemble des bâtiments indiqués dans la *fig.* 108, qu'on puisse envelopper dans le polygone ABCD. On mesurera les côtés et les angles. Pour première vérification, la somme des angles doit être égale à quatre angles droits. Si l'on ne pouvait prendre que trois côtés, ils suffiraient, à la rigueur, avec les deux angles qu'ils comprennent, pour former le quadrilatère; mais alors on ferait bien d'y joindre quelques diagonales, comme BD, ou quelques transversales qui donneraient lieu à de nouvelles observations.

Pour placer les détails, on mènera des perpen-

diculaires des sommets des angles des bâtiments, cours, jardins, sur les côtés du polygone d'enceinte ou sur les transversales; on mesurera aussi les distances des pieds de ces perpendiculaires aux points de repère A, D, C, B, aussi bien que la longueur de ces perpendiculaires, et, d'après les cotes bien conservées, on exécutera le dessin. Au lieu de perpendiculaires, on pourrait encore employer les sommets de triangles. Si l'on ne peut faire immédiatement un polygone qui renferme les objets à lever, on les rapportera successivement à une ou à plusieurs bases déterminées avec soin.

162. *Rapport sur le papier.* — Lorsque les dimensions sont bien indiquées sur le registre et sur le croquis, le rapport sur le papier, d'après l'échelle qui aura été indiquée, ne peut offrir de difficultés ; il ne s'agit plus que de construire des figures pour lesquelles on a les données suffisantes; seulement il faut se construire une bonne échelle, vérifier, d'après les données du croquis, le mis au net, à mesure qu'il avance.

163. *Former la carte d'un pays de peu d'étendue.* — C'est construire sur le papier une figure semblable à celle du terrain, dont les différentes parties sont supposées être projetées sur un plan horizontal, par des perpendiculaires abaissées de tous les objets sur ce plan.

Pour déterminer les positions respectives des

principaux points d'un plan, il faut considérer ces points comme les sommets des angles des triangles qui, par leur enchaînement, forment un réseau continu dans tous les sens. Ces triangles réunissent les conditions les plus avantageuses lorsqu'ils sont les plus grands possibles, qu'ils approchent de la forme équilatérale, et qu'ils sont liés au moins à une ligne principale ou base. Lorsque cette base et les trois angles de chaque triangle sont mesurés, on a tous les éléments nécessaires pour calculer de proche en proche les distances entre les objets, et alors on a le canevas du plan.

164. *Former le canevas d'un plan.*—Soient A, B, C, D, F, G, H, K, L les points fondamentaux d'un plan, points qui sont représentés par des signaux que l'on a établis convenablement en faisant la reconnaissance du pays ou par des tours ou clochers sur lesquels on peut aisément observer. On dessinera à vue tous ces objets sur un croquis destiné à contenir les différentes mesures que l'on prendra dans le cours des opérations, et l'on y tracera la base AB, des extrémités de laquelle on aperçoit la plupart des points A, B, C, ayant soin toutefois que cette base ne soit pas trop petite à l'égard de sa distance aux points visibles. Ensuite on mesurera au point A, avec le graphomètre ou avec le goniasmomètre, les angles CAB, DAB, HAB, FAB, BAG. Ces observations étant faites à la première station A, on ira

en faire de semblables à la seconde station B, c'est-à-dire que l'on relèvera les angles CBA, DBA, HBA, FBA, GBA; enfin l'on mesurera la base AB. On voit que de cette manière on connaîtra, dans chacun des triangles ACB, ADB, etc., un côté et les angles adjacents. On calculera donc facilement les distances AC, CB, AD, DB,..., à l'aide desquelles et de la base AB on déterminera ensuite sur le mis au net, et d'après l'échelle adoptée, les positions respectives des points A, C, D, H, B, G, F. Il reste à placer sur la carte les points K, L, qui n'ont pu être aperçus du point A, mais qui peuvent l'être des points B, H. Pour cet effet, on considérera la distance BH comme une nouvelle base qui servira pour lier ces nouveaux points au premier système, en observant les angles KHB, LHB, KBH, LBH, parce que alors on connaîtra de même, dans les triangles KHB, LHB, deux angles et un côté. Il est évident qu'il n'est pas nécessaire de mesurer la distance BH, puisqu'elle est donnée par la résolution du triangle AHB (*fig.* 109).

Lorsque la triangulation du pays est faite, on procède aux opérations de détail ainsi que nous l'enseignerons bientôt.

165. *Orienter un plan.* — Un plan est orienté lorsqu'on connaît l'angle qu'une de ses lignes principales fait avec le méridien terrestre, parce que de là on peut assigner la place que les objets occu-

pent à l'égard des quatre points cardinaux. Un des moyens faciles d'obtenir cet angle, est, pendant une belle nuit, de diriger la lunette supérieure du cercle sur l'étoile polaire, après avoir disposé le limbe de l'instrument verticalement. On laisse cet instrument exactement dans cette position, et, lorsqu'il fait jour, on fait mettre un signal un peu loin du lieu de l'observation, de manière qu'il se trouve dans l'axe optique de la lunette ramenée à l'horizon. Ensuite on observe l'angle entre ce signal et l'un des objets du terrain représentés sur la carte. Cet angle, que l'on nomme *azimut*, fait connaître la direction des côtés des triangles, par rapport à la méridienne terrestre.

L'étoile polaire n'étant pas tout à fait située au pôle du monde, il importe de l'observer au moment même où elle est dans le méridien. Or on a reconnu que ce moment arrive, à très-peu près, lorsque cette étoile est dans le même plan vertical avec la première des trois étoiles de la constellation de la grande Ourse, la plus voisine du quadrilatère : ainsi l'on saura, à l'aide d'un fil à plomb, lorsque cette circonstance aura lieu.

166. *Levés à la planchette.* — La planchette est un des instruments les plus utiles pour figurer de suite le terrain : il est composé d'une tablette carrée portant sur un genou que soutient un pied à trois branches, et ayant la liberté de se mouvoir en tous

sens. Ce genou doit être d'une construction telle, que l'on puisse imprimer à la tablette un mouvement de rotation lent et doux, sans toutefois que ce mouvement la dérange de la position horizontale qu'elle doit avoir pendant la durée des observations. Aux deux côtés opposés de la tablette sont ordinairement adaptés deux rouleaux, dont chacun des axes, soutenu par deux crapaudines, porte un pignon denté à l'un de ses bouts. Ces rouleaux servent à tendre et à rouler au fur et à mesure le papier sur lequel on trace les opérations. On donne la position horizontale à la planchette, au moyen d'un niveau à bulle d'air; mais, avec un peu d'habitude, l'œil supplée à cet instrument (*fig.* 110).

167. *Méthode de lever les détails d'un plan.* — Il y a deux méthodes de lever les détails, quel que soit l'instrument que l'on adopte à cet effet. La première est de tracer, autour de l'espace à figurer, un polygone quelconque du plus petit nombre possible de côtés; ou, si cet espace est considérable, de le diviser en polygones partiels, d'en mesurer exactement les angles et les côtés, puis d'abaisser de petites perpendiculaires de toutes les sinuosités du terrain sur ces côtés pris pour bases, ainsi qu'on le voit *fig.* 110 et enfin de dessiner tous les objets renfermés dans ces polygones.

REMARQUE. — Si l'espace était un bois tellement

épais qu'il fût impossible d'y pénétrer, on l'inscrirait entièrement dans un polygone. Les lignes d'opération se traceraient, au contraire, dans l'intérieur, si cet espace était une île ou un champ entouré de bois ou de marais.

168. DEUXIÈME MÉTHODE. — La seconde méthode, qui ne s'emploie ordinairement que quand une seule ligne ou base est accessible, consiste, comme au n° **164**, à relever tous les angles que forment, avec cette base connue, les rayons visuels dirigés de ses deux extrémités à tous les points visibles qui sont tant à sa droite qu'à sa gauche; mais on conçoit qu'il faut éviter les angles trop aigus et trop obtus, parce que la position d'un point donné par l'intersection de deux lignes est d'autant plus exacte que ces lignes se coupent moins obliquement.

REMARQUE. — L'emploi de cette méthode suppose que le contour du terrain est composé d'un assemblage de lignes droites; car s'il était courbé ou ondulé, on ne pourrait souvent en déterminer qu'un petit nombre de points, et il faudrait même, dans ce cas, en dessiner à vue les parties qui n'auraient pas été déterminées avec l'instrument.

169. PREMIÈRE QUESTION. — Lever l'espace accessible ABCDE (*fig.* 110).

On suppose que les points A, H, extrémités d'un

côté des triangles formés sur le terrain, soient sur la planchette représentés respectivement par a, h; on propose de lever l'espace accessible ABCDE, et de l'orienter par rapport à la base AH.

On placera la planchette horizontalement au point A, et de manière que a lui corresponde le plus exactement possible; ce à quoi l'on parviendra aisément, surtout si cet instrument est doué d'un mouvement lent de translation. Après cette disposition, on pose l'alidade (*fig.* 111) sur la planchette, en faisant coïncider la ligne de collimation A'B' avec la droite *ah* tracée sur le papier, et l'on fait tourner la planchette sur son pivot jusqu'à ce que l'axe déterminé par les crins tendus dans les deux fentes des deux pinnules de l'alidade soit dans la direction de la base AH; alors la planchette est orientée, et ne doit plus être dérangée tant que l'on observe à la même station. On pique ensuite une aiguille verticalement au point a; et, pour relever l'angle BAH, on fait tourner légèrement l'alidade autour de cette aiguille, jusqu'à ce qu'on aperçoive dans la direction des crins le jalon B, ou tout autre, placé dans l'alignement AB. Enfin l'on trace au crayon une ligne indéfinie le long de la règle et du côté de l'aiguille, et l'on a sur le papier la ligne *ab* faisant avec *ah* l'angle $bah = \text{BAH}$, pourvu cependant qu'après cette seconde opération la ligne *ah* coïncide avec AH, ce qu'il est important de vérifier.

Avant de quitter la station A, on fera mesurer la

distance AB, on prendra sur l'échelle du plan le nombre de mètres trouvés, et l'on portera la longueur obtenue de cette manière de *a* en *b*; on fera en outre mesurer les parties de la ligne AB, ainsi que les petites perpendiculaires abaissées des points de la courbe sur cette ligne, et on les rapportera sur le plan, comme on a rapporté la ligne entière AB. Si l'on a bien opéré, il faudra que toutes les distances partielles A*x*, *xy*, etc., soient égales à AB. Lorsque la courbe A*x'y'* .... B serpente beaucoup, il est nécessaire de multiplier, autant qu'il est possible, les perpendiculaires *xx'*, *yy'*, etc.; et il est commode, dans ce cas, de les rendre équidistantes. Pour abaisser ces perpendiculaires, on se sert de l'équerre d'arpenteur ou du goniasmomètre. En quittant la station A, on y plantera un jalon, et l'on ira placer la planchette horizontalement au point B, en ayant soin, après avoir ôté le jalon, de faire convenir le point *b* du plan avec celui dont il s'agit. On orientera derechef l'instrument, ou, ce qui est de même, on rendra sa nouvelle position parallèle à la première; et à cet effet on mettra, comme précédemment, le bord de l'alidade sur la ligne *ab*; puis on fera tourner la planchette jusqu'à ce que l'axe optique des pinnules passe par le jalon A. Dans cet état, la planchette sera orientée. Ensuite, pour relever l'angle ABC, on fera tourner l'alidade autour de l'aiguille *b*; et lorsque le rayon visuel passera par le jalon C, on aura sur le plan la direction *bc*

correspondante à BC; par conséquent *abc* sera égal à ABC.

Il est de la plus grande importance de vérifier ses opérations à chaque station; ainsi, sans déranger la planchette, on mettra le bord de l'alidade sur la ligne *bh*; et si l'on ne s'est pas trompé sur la mesure de AB, ou en orientant l'instrument, il faudra que l'axe optique des pinnules passe en même temps par le point H du terrain. Dans le cas où ce point serait invisible, on dirigerait des rayons visuels sur d'autres points connus et déjà représentés sur le plan. On continuera de la même manière pour lever le reste du contour de la figure ABCDE, et ce sera une dernière preuve de la justesse de toute l'opération, si, après avoir orienté la planchette en E, le rayon visuel *ch* coïncide exactement avec l'alignement EB.

170. GRAPHOMÈTRE. — Le graphomètre est un instrument qui sert pour mesurer les angles; c'est un demi-cercle divisé en 180 degrés ou en 200 grades. Chaque degré ou grade est lui-même divisé en deux parties. La partie circulaire sur laquelle sont tracées les divisions se nomme le limbe. Aux graphomètres ordinaires on adapte, aux extrémités du diamètre fixe, deux pinnules ou petites fenêtres au travers desquelles on regarde les objets. Chaque pinnule, qui doit être exactement perpendiculaire au limbe, est fendue, et le milieu de l'ouverture est traversé dans

le sens de la longueur, par une soie ou par un crin. Lorsqu'on vise à un objet, on a soin de mettre près de l'œil la fente d'une pinnule par laquelle on regarde si le fil correspondant couvre cet objet (*fig.* 112).

La règle mobile que l'on nomme *alidade*, est assujettie à tourner autour du centre de l'instrument, et est garnie de même de deux pinnules. Pour mesurer les angles avec plus de précision, on a imaginé de tracer des parties plus petites que celles du limbe aux extrémités de cette alidade, et près des pinnules; c'est à l'aide de ces petites divisions ou de ce vernier, que l'on estime les parties du degré ou du grade. Supposons, par exemple, que le graphomètre soit divisé en 400 parties égales, dont 2 forment le grade, et que 9 de ces parties correspondent à 10 parties du vernier; alors chacune de ces dernières embrassera sur ce limbe un arc de $\frac{9,50'}{10} = 45$ minutes centésimales. Si donc la première ligne du vernier, que l'on nomme ligne de foi, tombe exactement sur une ligne du limbe, l'angle compris entre le diamètre fixe et le diamètre mobile sera mesuré par le nombre de parties du limbe; si au contraire la seconde ligne du vernier coïncide avec un trait du limbe, il faudra au nombre de grades ou demi-grades marqués sur le limbe jusqu'à la ligne de foi, ajouter 5′, quantité dont une partie du limbe excède une partie du vernier. En général, on comptera de plus autant de fois 5′ qu'il y aura de parties du ver-

nier depuis la ligne de foi jusqu'à la ligne qui correspond à l'une de celles du limbe.

Les graphomètres les plus exacts et les plus commodes sont ceux qui sont garnis de lunettes qu'on fait mouvoir lentement à l'aide de vis de rappel, et que l'on arrête au moyen de vis de pression. Quand les lunettes peuvent s'incliner de quelques grades à l'égard du limbe, on est dispensé de réduire à l'horizon les angles qui n'y sont pas situés, parce que alors on les observe dans ce plan, en disposant le limbe horizontalement.

Tout l'instrument porte sur un pied, de manière qu'il est facile d'incliner le limbe dans tous les sens; à cet égard, on évite beaucoup de lenteur et de tâtonnement, en disposant, le plus qu'il est possible, dans la direction des objets que l'on observe, les vis qui procurent cette inclinaison (*fig.* 112).

171. PREMIÈRE QUESTION. — Mesurer un angle avec le graphomètre.

Pour mesurer avec le graphomètre l'angle A sous lequel on voit la distance BC, placez d'abord le centre de l'instrument au point A, puis disposez l'alidade fixe de manière que, regardant au travers des pinnules, le fil vertical couvre le point C; enfin dirigez l'alidade mobile sur l'objet B: l'arc parcouru par celle-ci sera la mesure de l'angle A (*fig.* 113).

Cette méthode suppose que les trois points A, B, C, sont à très-peu près dans le même plan horizontal,

ou que le cercle porte des pinnules plongeantes; autrement si les points B, C, étaient hors de l'horizon de l'observateur, et que les pinnules n'eussent point la propriété dont il s'agit, il faudrait placer le limbe dans le plan même de l'angle à mesurer.

172. DEUXIÈME QUESTION. — Lever au graphomètre l'espace accessible ABCDE.

Pour lever au graphomètre l'espace accessible ABCDE, on placera l'instrument de manière que son centre soit au point A, on dirigera l'alidade fixe dans la direction BA, et l'alidade mobile sur le point E; l'arc décrit par l'alidade mobile sera la mesure de l'angle BAE; on mesurera exactement les distances BA, AE; on plantera des jalons aux points B et E; on transportera l'instrument au point B, on mesurera de même l'angle ABC, puis le côté BC; on continuera de même à mesurer les angles C, D, E, aussi bien que les côtés CD, DE; et si toutes ces opérations ont été faites exactement, en additionnant la valeur trouvée de tous les angles, la somme sera égale à autant de fois 200 grades ou 180 degrés qu'il y a de côtés dans le polygone, moins deux; c'est-à-dire que, pour un triangle, la somme des angles devra être égale à 200^{gr}; pour un quadrilatère à deux fois 200^{gr} ou à 400^{gr}; pour un pentagone à trois fois 200^{gr} ou à 600^{gr}, et ainsi de suite.

De plus, en rapportant ce polygone sur le papier, en mesurant les angles avec le rapporteur, et en pre-

nant la longueur des côtés sur l'échelle du plan, il faut, si l'on a bien pris toutes les mesures exactement, que le polygone soit fermé, c'est-à-dire qu'en construisant le dernier angle DEA, la dernière ligne EA se dirige vers A, et que la distance entre ces points comprenne un nombre de mètres égal à celui trouvé sur le terrain.

173. *Chaîne métrique.* — Pour mesurer une ligne droite tracée sur le terrain, à l'aide de jalons ou de piquets, on se sert du double mètre ou de la chaîne métrique, qui est formée de petites baguettes de fer de 2 décimètres de long, attachées les unes aux autres par de petits anneaux. Cette chaîne a ordinairement 10 mètres de long, et est garnie de deux poignées à ses extrémités. Le chaîneur, qui marche en avant dans la direction des jalons, porte dix fiches de fer qu'il plante en terre, les unes après les autres, lorsque la chaîne est suffisamment tendue et quand ses extrémités sont dans une même ligne horizontale; ensuite le chaîneur qui vient après enlève ces fiches au fur et à mesure. Si la ligne que l'on parcourt est de plus d'une portée, c'est-à-dire si elle est plus longue que dix fois la chaîne, on continue la même opération en retenant ou en écrivant sur un carnet le nombre de portées et de mètres que contient la ligne mesurée.

174. *Levés à la boussole.* — La boussole est un

instrument propre à lever avec promptitude tous les objets destinés à remplir et orner les petites masses figurées à la planchette. Cet instrument est composé d'une aiguille aimantée, mise en équilibre sur un pivot extrêmement délié et enfermée dans une boîte carrée dont le fond est garni d'un cercle de métal divisé en 360 degrés ou en 400 grades; il est même utile que ce cercle soit divisé en demi-grades. Au fond de la boîte sont marqués les quatre points cardinaux, et la ligne nord-sud, numérotée $0^{gr}, 200^{gr}$, est parallèle à un des côtés de la boîte. A l'un de ces côtés est adaptée une alidade à visière ou à lunette, qui peut prendre toutes les inclinaisons possibles à l'égard de l'horizon, sans cependant se mouvoir dans un plan autre que celui qui est perpendiculaire au contour gradué. La boussole est mobile sur un genou à coquilles, réuni à un pied à trois branches, et que l'on peut détacher de la boîte pour faire usage de cet instrument (*fig.* 115).

Lorsqu'on observe avec la boussole, il faut lui donner la position horizontale, et pointer constamment du même côté pour éviter toute méprise, c'est-à-dire amener toujours l'alidade à sa gauche ou à sa droite. On compte ensuite les grades consécutivement depuis 0 jusqu'à 400 grades. Bien entendu qu'en regardant au travers de l'alidade, on doit prendre pour oculaire le petit trou qui est à son extrémité, et pour objectif la languette correspondante.

175. *Lever avec la boussole le plan* ABCDE, *dont tous les points sont accessibles.* — On placera horizontalement la boussole au point A, et on la fera tourner sur son pivot jusqu'à ce que le point B soit dans la direction de l'axe optique de la lunette. L'aiguille, après son mouvement oscillatoire, prendra la direction nord; ainsi en comptant, suivant l'ordre naturel des numéros de division, le nombre de degrés ou de grades compris depuis le rayon visuel AB, ou ce qui est de même, depuis le zéro de la ligne nord-sud jusqu'à la pointe boréale de l'aiguille, on aura la mesure de l'angle formé par la direction AB et le méridien magnétique (*fig.* 116).

Lorsque les mesures prises sur le terrain ne sont pas rapportées de suite à l'aide de l'échelle et du rapporteur, on forme le croquis du plan sur lequel on écrit toutes ces mesures; mais quelquefois, pour éviter la confusion, l'on enregistre à part les angles observés au même point, et l'on met alors des lettres ou des numéros de renvoi pour se reconnaître en construisant le mis au net. Supposons que *abcde...* soit le brouillon dont il s'agit, on écrira donc au point *a* le nombre de grades trouvés à la station A; et, en supposant que *ab* représente l'alignement AB, on écrira aussi sur cette ligne le nombre de mètres contenus dans AB. On placera de même la boussole horizontalement au point B, et l'on observera l'inclinaison de la droite BC, en ayant soin de l'écrire au point *b* du brouillon. On continuera de la même

manière jusqu'à ce que l'on soit revenu à la première station A.

Un des moyens de s'assurer qu'il ne s'est pas glissé d'erreur notable dans la mesure des angles, est de voir si ceux intérieurs du polygone forment ensemble autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux, comme nous l'avons déjà indiqué dans le n° **172**; mais comment connaître chacun de ces angles, puisqu'ils n'ont pas été observés immédiatement? Les directions de l'aiguille aimantée étant censées parallèles pour tous les points du plan, l'angle *abc*, par exemple, sera égal à *nab* + *s'bc*; mais $nab = 400 - 355 = 45^{gr}$ et $s'bc = 309 - 200 = 109^{gr}$; donc $abc = 45 + 109 = 154^{gr}$; ainsi des autres angles (*fig.* 116).

A l'égard de la vérification des côtés, on ne pourra la faire qu'en construisant le polygone au moyen du rapporteur et de l'échelle du plan; on verra alors si la figure se forme bien. Pour effectuer cette construction de la manière la plus simple et la plus exacte, on tirera sur le papier un grand nombre de lignes parallèles qui représenteront les directions de l'aiguille aimantée, et serviront à déterminer la position du rapport aux divers points du plan.

CHAPITRE XIX.

MESURE DES DISTANCES INACCESSIBLES.

176. PREMIÈRE QUESTION. — Mesurer la distance d'un point B où l'on peut se placer, à un autre point inaccessible A, et à peu près au même niveau, comme la largeur d'une rivière.

SOLUTION. PREMIER MOYEN. — En faisant usage d'une équerre dont les côtés sont respectivement égaux à 3, 4, 5. On appliquera le côté égal à 3 en BC; on placera un jalon à l'extrémité D du côté égal à 4; on jalonnera le prolongement de DE; on élèvera en C une perpendiculaire CE sur AC; on marquera le point E où cette perpendiculaire rencontre AD prolongé; on aura $AB = \frac{12}{CE - 4}$ (*fig.* 117).

REMARQUE. — On pourrait encore donner une longueur quelconque à la perpendiculaire BD et à BC; on mesurera CE, et l'on aura $AB = \frac{BC \times BD}{CE - BD}$.

DEUXIÈME MOYEN. — En employant encore le même instrument; on élèvera sur AB une perpendiculaire BD, sur laquelle on prendra, à partir du point B, deux longueurs arbitraires BC, CD. Au point D on mènera une perpendiculaire à BD, on plantera des jalons en B, C, D. On marquera sur DE le prolongement de AC; au point E, d'où l'on

apercevra les points A et C sur un même rayon visuel, on mesurera DE, et l'on aura $AB = \frac{BC \times DE}{CD}$. Si par exemple $BC = 10^m$, $CD = 2^m$, $DE = 5^m$, on aura $AB = \frac{10 \times 5}{2} = 25^m$ (*fig.* 118).

REMARQUE. — Il n'est pas nécessaire que les angles B et D (*fig.* 118) soient droits, il suffit qu'ils soient égaux, ou, en d'autres termes, que DE et AB soient des droites parallèles, et la formule $AB = \frac{BC \times DE}{DC}$ (*fig.* 118) est toujours bonne.

177. DEUXIÈME QUESTION. — Mesurer la hauteur d'un point élevé B′, en supposant qu'on puisse aller jusqu'au pied B, mais que l'on ne puisse y monter.

SOLUTION, en faisant usage du voyant. — On plantera verticalement un piquet AA′ d'une hauteur connue de 1 mètre par exemple, afin de viser plus facilement que si l'on voulait placer l'œil près du terrain. On mesurera une distance AC prise arbitrairement, de 5 mètres par exemple. On placera le voyant en C; on fera élever la petite planchette, pendant que l'œil étant en A′, on regardera le mur B′; dès que l'observateur apercevra la raie du voyant dans cet alignement, il fera signe d'arrêter. Il mesurera la hauteur CC′ de la ligne de mire au-dessus du point C, et, après avoir ôté $CD = AA'$ de CC′, le reste sera C′D, il s'ensuivra $EB' = \frac{DC' \times AB}{A'D}$: en ajoutant

à cette quantité la hauteur AA′ du piquet, on aura la hauteur cherchée BB′ (*fig.* 119).

CHAPITRE XX.

MESURE DES AIRES DES FIGURES RECTILIGNES.

178. *Mesurer une surface ou en chercher l'aire*, c'est chercher combien de fois elle contient le carré qui a pour côté la ligne prise pour unité de longueur, par exemple le mètre carré.

179. *Formulé.* — On appelle formule l'expression abrégée d'une règle donnée pour un calcul à effectuer. On emploie pour cela des lettres qui représentent d'une manière très-générale et très-simple un nombre, une surface, un volume d'après la convention qu'on établit chaque fois.

180. PREMIÈRE QUESTION. — Trouver la surface d'un rectangle.

RÈGLE. — On multiplie la base par la hauteur, c'est-à-dire le nombre d'unités linéaires contenues dans l'une de ces deux lignes par le nombre d'unités linéaires contenues dans l'autre; et le produit exprime combien de fois le carré construit sur l'unité de longueur est contenu dans la surface du rectangle. Si, par exemple, on a employé le mètre comme unité de longueur, la surface sera exprimée en mètres car-

rés; elle le serait en décimètres carrés, si l'on avait mesuré les deux dimensions du rectangle avec le décimètre. Le produit de deux lignes doit toujours s'entendre comme il vient d'être expliqué.

181. RAISONNEMENT. — Soit le rectangle FGIK dont on veut connaître la surface; supposons que le mètre soit l'unité linéaire, qu'il soit contenu sept fois sur la base FG et quatre fois sur la hauteur FK. Soit FL=FN=1 mètre. Imaginons que par tous les points de division de FK, on ait mené des parallèles à FG, et que par tous les points de division de FG on ait mené des parallèles à FK; la figure FLMN sera le mètre carré. Cette unité de surface est contenue sept fois dans le rectangle FGPN; mais ce rectangle est lui-même contenu quatre fois dans le rectangle FGIK; donc ce dernier contient 4 fois 7 fois le mètre carré : donc la surface $= 4 \times 7 = 28^{\text{m. car.}}$. Si l'on représente en général par B le nombre d'unités contenues dans la base d'un rectangle, par H celui des unités de sa hauteur, et par S le nombre d'unités carrées, la règle ci-dessus énoncée pourra s'écrire ainsi $S = B \times H$. Cette dernière égalité est donc une formule; elle exprime complétement, d'une manière bien abrégée, la règle précédemment énoncée. On sous-entend l'unité de superficie qui est toujours connue de celui qui calcule, puisque c'est le carré construit sur l'unité linéaire (*fig.* 120).

182. PREMIÈRE APPLICATION. — Trouver l'aire du carré ABCD, dont le côté = 10 mètres.

SOLUTION. — L'aire cherchée est $S = 10 \times 10 = 100$ fois l'unité carrée. Donc le mètre carré vaut 100 décimètres carrés; le décimètre carré vaut 100 centimètres carrés, et ainsi de suite. Donc aussi le décimètre carré est le centième du mètre carré; le centimètre carré est le centième du décimètre carré, et ainsi de suite (*fig.* 121).

183. DEUXIÈME APPLICATION. — Trouver l'aire du rectangle MNPR dont la base MN $= 6^{m},37$ et la hauteur MR ou $H = 3^{m},4$.

SOLUTION. $S = B \times H = 6^{m},37 \times 3^{m},4 = 21^{m.car.},658$ = vingt et un mètres carrés 658 millièmes de mètre carré et non 658 millimètres carrés. C'est énoncer le nombre en parties décimales du mètre carré; mais on peut encore énoncer le nombre précédent en parties carrées du mètre; on a alors des décimètres carrés, des centimètres carrés, etc. On a soin pour cela de faire en sorte que le nombre de décimales soit pair, en écrivant s'il le faut un zéro à la suite du nombre trouvé. Les deux premières décimales expriment des décimètres carrés, les deux suivantes des centimètres carrés, et ainsi de suite. En plaçant d'abord un zéro à la droite du nombre qu'on vient de trouver, on aura $S = 21^{m.car.},6580$ qu'on peut énoncer ainsi : 21 mètres carrés, 65 décimètres carrés et 80 centimètres carrés (*fig.* 122).

184. TROISIÈME APPLICATION. — Trouver la surface du carré qui a douze unités pour côté.

SOLUTION. $S = 12 \times 12 = 144$; donc 1 pied carré contient 144 pouces carrés; 1 pouce carré contient 144 lignes carrées.

185. DEUXIÈME QUESTION. — Trouver la surface d'un parallélogramme (*fig.* 123).

On multiplie la base par la hauteur du parallélogramme, et le produit exprime la surface en unités carrées : $S = b \times h$ (dans toutes ces formules, b, b', b'', désigneront des bases; h, h', h'', des hauteurs; S l'aire ou la surface).

Soient $AB = b = 3^m,525$; $CE = h = 2^m,17$; il s'ensuivra : $S = b \times h = 3^m,525 \times 2^m,17$ ou $S = 7^{m.\,car.},64925$, résultat à lire des deux manières ci-dessus.

186. TROISIÈME QUESTION. — Trouver la surface d'un triangle, connaissant sa base et sa hauteur.

On multiplie la base par la hauteur, et l'on prend la moitié du produit; on a l'aire demandée. Exemple: soient (*fig.* 124) $AC = b = 2^m,7$; $DE = h = 1^m,2$; $S = \frac{2^m,7 \times 1^m,2}{2} = \frac{3^{m.\,car.},24}{2} = 1^{m.car.},62$.

187. QUATRIÈME QUESTION. — Trouver la surface d'un triangle dont on connaît les trois côtés.

Si l'on désigne par a, b, c, les trois côtés d'un triangle, c'est-à-dire le nombre d'unités de longueur con-

tenues dans chacun d'eux, et par $\frac{p}{2}$ la demi-somme des trois côtés, on pourra calculer la surface S du triangle par cette formule :

$$S=\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}.$$

On peut ainsi énoncer la règle renfermée dans cette formule : On fait la somme des trois côtés du triangle; on en prend la moitié, on a le facteur $\frac{p}{2}$; on retranche tour à tour de cette demi-somme chacun des trois côtés, on a les trois facteurs $\frac{p}{2}-a$, $\frac{p}{2}-b$, $\frac{p}{2}-c$; on fait le produit de ces quatre facteurs; on extrait la racine carrée de ce produit, on a le nombre d'unités carrées contenues dans la surface du triangle. Exemple : soient $a=12$, $b=10$, $c=14$; il s'ensuivra

$\frac{1}{2}p=18$; $\frac{1}{2}p-a=6$; $\frac{1}{2}p-b=8$; $\frac{1}{2}p-c=4$,

et

$S=\sqrt{18\times 6\times 8\times 4}=\sqrt{3456}=58$ mètres carrés, à moins d'une unité (*fig.* 125).

188. CINQUIÈME QUESTION. — Trouver l'aire d'un trapèze.

On fait la somme des deux bases parallèles b et b'; on en prend la moitié $\frac{b+b'}{2}$, et on la multiplie par

la hauteur h, on a l'aire cherchée; elle est donnée par la formule $S = \left(\frac{b+b'}{2}\right) \times h$. On trouve par exemple (*fig.* 126) $S = \left(\frac{AB+DC}{2}\right) \times EF$.

Autrement. — On multiplie la hauteur h par la ligne b'' menée par le milieu des côtés non parallèles. On a l'aire exprimée par la formule $S = h \times b''$.

PREMIER EXEMPLE. — Soient $AB = b = 8^m,2$; $DC = b' = 6^m,42$; $EF = h = 4^m,30$, on trouve successivement

$$S = \left(\frac{8,2+6,42}{2}\right) \times 4,30 = \frac{14,62}{2} \times 4,3 = 7,31 \times 4,3 = 31^{m.\,car.},433.$$

SECOND EXEMPLE. — Si $HG = b''$ est donné immédiatement, et que $b'' = 7,31$, on aura de suite $S = 7,31 \times 4,3 = 31^{m.\,car.},433$.

189. SIXIÈME QUESTION. — Trouver l'aire d'un polygone régulier.

On multiplie le périmètre du polygone par l'apothème ou le rayon du cercle inscrit; on divise le produit par 2, et l'on a la surface demandée. Quant au périmètre, on le trouve en multipliant la longueur d'un des côtés par le nombre des côtés du polygone. Exemple: soient (*fig.* 127) ABCDEF un polygone régulier, $AB = 21$, $OR = 14,5$; le périmètre sera $21 \times 6 = 126$; la surface

$$S = \frac{126 \times 14,5}{2} = \frac{1827}{2} = 913,5.$$

En désignant le côté par a, le nombre des côtés par n, et l'apothème du polygone par r, la surface est exprimée par la formule $S = \frac{a \times r \times n}{2}$.

190. SEPTIÈME QUESTION. — Trouver l'aire d'un polygone quelconque.

On décompose le polygone en figures de l'espèce de celles qui précèdent, on fait la somme des surfaces de ces figures; on a la surface demandée.

REMARQUE. — Le triangle est la figure qu'on retrouve le plus souvent dans ces décompositions.

CHAPITRE XXI.

MESURES DES LIGNES CIRCULAIRES.

191. PREMIER PRINCIPE. *Valeur de la circonférence.* — Quand le diamètre d'un cercle est égal à l'unité, la circonférence est à peu près égale à $\frac{22}{7}$ ou à 3,1415926; on désigne ordinairement cette valeur par π, c'est ce qu'on appelle le rapport de la circonférence au diamètre.

REMARQUE. — On voit que la circonférence est plus grande que trois fois le diamètre d'environ $\frac{1}{7}$ ou de 0,1415926 de ce diamètre; il faut observer aussi

que 3,1415926 est un peu trop petit et que $\frac{22}{7}$ est trop grand.

192. DEUXIÈME PRINCIPE. — Quand on doit diviser un nombre par π, on peut multiplier ce nombre par $\frac{1}{\pi} = \frac{7}{22} = 0,318$.

193. TROISIÈME PRINCIPE. $\frac{22}{7} = 3,142$ est la valeur de la demi-circonférence quand le rayon $= 1$.

194. PREMIÈRE QUESTION. — Connaissant le diamètre D ou le rayon R d'un cercle, en trouver la circonférence C ?

SOLUTION. — On multipliera la longueur D ou 2R du diamètre par la valeur de π, et l'on aura la longueur de la circonférence $C = 2\pi R = \pi D$.

195. APPLICATION. — Trouver la circonférence d'un cercle dont le rayon $= 2^m,53$.

SOLUTION. — En doublant le rayon, on a $2^m,53 \times 2 = 5,06$ pour le diamètre D, et en multipliant ce diamètre par 3,142, on a $5,06 \times 3,142 = 15^m,90$: on a la circonférence cherchée. On pourrait encore multiplier le diamètre par 22 et diviser le produit par 7, on aurait $\frac{5,06 \times 22}{7} = 15,90$.

196. SECONDE APPLICATION. — Trouver la circonférence d'un cercle dont le rayon $= 1$.

SOLUTION. — Puisque le rayon = 1, le diamètre = 2, et en multipliant 2 par 3,142 on trouve 6,284 pour la circonférence cherchée, ou 6,28 à moins d'un demi-centième.

197. DEUXIÈME QUESTION. — Connaissant la circonférence d'un cercle, en trouver le diamètre ou le rayon?

SOLUTION. — Pour trouver le diamètre d'un cercle, lorsque la circonférence est donnée, on multiplie cette circonférence par $\frac{1}{\pi} = \frac{7}{22} = 0{,}318$; si l'on veut avoir le rayon, on divisera ce résultat par 2. On pourrait encore diviser la circonférence donnée par 3,142 ou par $\frac{22}{7}$.

198. APPLICATION. — Trouver le diamètre d'un cercle dont la circonférence = $15^{m}{,}90$. En multipliant 15,90 par $\frac{7}{22}$ on a le diamètre D = 5,06 à moins d'un demi-centième; et le rayon $R = \frac{D}{2} = 2{,}53$.

199. TROISIÈME QUESTION. — Connaissant le nombre de degrés d'un arc et le rayon du cercle auquel il appartient, trouver la longueur de cet arc?

SOLUTION. — On calcule la longueur de la circonférence dont on a le rayon; on multiplie cette cir-

conférence par le nombre de degrés de l'arc, et l'on divise le produit par 360. Si l'arc comprend des minutes, il faut le réduire tout en minutes, multiplier la circonférence par le nombre de minutes, et diviser le produit par 21600, nombre de minutes que contient la circonférence. En désignant la circonférence par C, l'arc dont on cherche la longueur par A, par n° ou n' le nombre de degrés et de minutes qu'il contient, on a la formule

$$A = \frac{C + n^\circ}{360} = \frac{C + n'}{21600}.$$

200. PREMIÈRE APPLICATION. — Le rayon d'un cercle est de $3^m,50$; l'arc est de 40°, en trouver la longueur en mètres.

SOLUTION. — En doublant le rayon on a 7 pour le diamètre, et en multipliant 7 par 3,142 on a 22 pour la circonférence. Il reste à multiplier 22 par 40° et à diviser le produit par 360 pour avoir la longueur de l'arc; donc

$$A = \frac{22 \times 40}{360} = \frac{22 \times 4}{36} = \frac{22}{9} = 2,44.$$

201. SECONDE APPLICATION. — Trouver la longueur de l'arc de $62^\circ 17'$, appartenant à un cercle dont le rayon égale 5,36.

On trouve d'abord pour la circonférence $C = 5,36 \times 2 \times 3,142 = 33,68$ en négligeant les millièmes; il faut multiplier ce nombre par $62^\circ 17'$ et diviser le produit par 21600. On multiplie 62° par 60 pour ré-

duire les degrés en minutes, ce qui donne $3720'$, auxquelles on ajoute $17'$, et l'on trouve $62°17' = 3737'$; donc

$$A = \frac{C \times n'}{21600} = \frac{33,68 \times 3737}{21600} = 5,8269 = 5,827,$$

à moins d'un demi-millième.

202. QUATRIÈME QUESTION. — Mesurer par un moyen purement mécanique l'arc ou la circonférence d'un cercle?

Dans la pratique, quand cela se peut, on enveloppe l'arc d'un fil ou d'un cordeau qu'on étend ensuite et dont on mesure la longueur. On en fait autant pour la circonférence.

203. CINQUIÈME QUESTION. — Connaissant la longueur et le nombre de degrés d'un arc, trouver la longueur de la circonférence dont il fait partie?

SOLUTION. — On multiplie la longueur connue de l'arc par 360, et l'on divisera le produit par le nombre de degrés donné: on aura la longueur de la circonférence; mais s'il y a des minutes jointes au nombre de degrés de l'arc, on réduira tout ce nombre en minutes; on multipliera la longueur donnee de l'arc par 21600, et l'on divisera le produit par le nombre de minutes connu; le quotient exprimera la longueur de la circonférence.

204. APPLICATION. — La longueur A d'un arc est de $43°20'$ et de $3^m,70$, quelle est la longueur de la circonférence C à laquelle il appartient?

SOLUTION. — On réduira d'abord les 43°20′ en minutes, et l'on trouvera 2600′; on multipliera la longueur 3,70 par 21600 et l'on divisera ce produit par 2600, ce qui donnera

$$\frac{3,7\times 21600}{2600}=\frac{3,7\times 216}{26}=30,73$$

pour la longueur de la circonférence C. On trouvera le diamètre comme dans la deuxième question.

205. SIXIÈME QUESTION. — Connaissant la longueur d'un arc, et le rayon du cercle auquel il appartient, trouver le nombre de degrés de l'arc.

SOLUTION. — Comme on connaît le rayon du cercle, on cherchera d'abord la circonférence en doublant le rayon et en multipliant le produit par 3,142. On multipliera l'arc donné par 360°, et l'on divisera le produit par la circonférence trouvée : on aura le nombre de degrés de l'arc.

206. APPLICATION. — Soient la longueur de l'arc donné A=3,7, le rayon du cercle =5,36, il s'ensuivra que le diamètre 2R=5,36×2=10,72; puis la circonférence C=π×D=π×2R=10,72×3,142 =33,68, à moins d'un demi-centième. En multipliant ce nombre 3,7 par 360, et divisant le produit par la valeur de C=33,68, on a pour le nombre de degrés demandé

$$N=\frac{3,7\times 360}{33,68}=\frac{1332}{33,68}=\frac{133200}{3368}=39°33',$$

à moins d'une demi-minute.

CHAPITRE XXII.

MESURE DES AIRES CIRCULAIRES.

207. PREMIÈRE QUESTION. — Trouver l'aire d'un cercle dont on connaît la circonférence et le rayon.

SOLUTION. — On multiplie la circonférence par la moitié du rayon $S = \frac{C \times R}{2}$.

208. APPLICATION. — Soit la circonférence d'un cercle $= 26^m,707$: le rayon $R = 4^m,25$; on a

$$S = \frac{26,707 \times 4,25}{2} = 26,707 \times 2,125 = 56,725375 = 56,7254,$$

à moins d'un demi-dix-millième ou d'un demi-centimètre carré.

209. DEUXIÈME QUESTION. — Connaissant le rayon d'un cercle, en trouver la surface.

SOLUTION. — On fait le carré du rayon, c'est-à-dire qu'on multiplie ce rayon par lui-même; on multiplie ce carré par la valeur de $\pi = \frac{22}{7} = 3,142$, et l'on a la surface du cercle $S = \pi \times R^2$.

210. APPLICATION. — Soit le rayon d'un cercle $= 4^m,25$, on aura $R^2 = 18^{m.c.},0625$; puis, en multipliant ce nombre par 3,142, on aura

$$S = 18,0625 \times 3,142 = 56,752375.$$

211. TROISIÈME QUESTION. — Connaissant la circonférence d'un cercle, en trouver la surface.

SOLUTION. — On fera le carré C^2 de la circonférence C; on multipliera ce produit par la fraction $\frac{1}{\pi} = \frac{7}{22} = 0{,}318$; on divisera le produit par 4, et l'on aura la surface demandée $S = \frac{C^2 \times \frac{1}{\pi}}{4}$.

212. APPLICATION. — Soit $C = 26{,}707$ la circonférence d'un tronc d'arbre pris à une certaine hauteur; on demande la surface du cercle qui termine cette circonférence. On a

$$S = \frac{26{,}707 \times 26{,}707 \times 0{,}318}{4} = 56{,}7045.$$

213. QUATRIÈME QUESTION. — Connaissant l'arc d'un secteur et le rayon du cercle, trouver l'aire du secteur.

SOLUTION. — On multiplie la longueur de l'arc par la moitié de celle du rayon, on a la surface du secteur ou $S = \frac{A \times R}{2}$.

214. APPLICATION. — Soit le rayon du cercle $R = 3{,}5$; l'arc $A = 2{,}33$; la surface du secteur sera

$$S = \frac{A \times R}{2} = \frac{2{,}33 \times 3{,}5}{2} = \frac{8{,}155}{2} = 4^{\text{m. car.}},0775.$$

215. CINQUIÈME QUESTION. — Trouver l'aire d'un segment circulaire.

SOLUTION. — On calcule la surface du secteur,

puis celle du triangle, et la différence de ces deux surfaces est celle du segment.

216. APPLICATION. — Soit l'arc AB=62° 17′; le rayon AC=5,36, et la perpendiculaire BF au rayon AC=4,75 (*fig.* 127).

SOLUTION. — Cherchons d'abord la longueur de l'arc AB;

$$AB = \frac{C \times 62° 17'}{360} = \frac{C \times 3737}{21600}.$$

D'ailleurs

$$C = \pi \times 2R = 3,142 \times 2 \times 5,36 = 33,68;$$

donc l'arc AB ou $A = \frac{33,68 \times 3737}{21600} = 5,827$. Donc le secteur $= \frac{5,827 \times 4,75}{2} = 13^{m.car.},84$. La surface du triangle $S = \frac{5,36 \times 4,75}{2} = 12^{m\ car.},73$; d'où le segment égale $13^{m.\ car.},84 - 12^{m.\ car.},73 = 1^{m.\ car.},11$.

217. SIXIÈME QUESTION. — Connaissant la surface d'un secteur, et la longueur de l'arc de cercle qui lui sert de base, trouver le rayon du cercle dont ce secteur fait partie.

SOLUTION. — On multiplie la surface par 2; on divise le produit par l'arc donné; on a le rayon ou $R = \frac{2S}{A}$.

218. APPLICATION. — Soit $S = 4^{m\ car.},20$ et $A = 3^{m},5$, il s'ensuivra $2S = 2 \times 4,2 = 8,4$; puis $R = \frac{8,4}{3,5} = 2,4$.

219. SEPTIÈME QUESTION. — Connaissant la surface d'un secteur circulaire, et le rayon du cercle, trouver la longueur de l'arc.

SOLUTION. — On multipliera la surface par 2; on divisera le produit par le rayon donné, on aura la longueur de l'arc cherché.

220. APPLICATION. — Soit $S = 4^{m.car},20$ et $R = 2^m,4$; on trouvera $A = \frac{2 \times 4,2}{2,4} = 3,5$.

221. HUITIÈME QUESTION. *Problème.* — Trouver combien il faudrait de carreaux de forme hexagonale de $0^m,16$ de côté pour carreler une tour ronde de $5^m,3$ de diamètre. (On augmentera le diamètre d'un décimètre, à cause de la perte qui pourra se faire sur les bords de la tour.)

SOLUTION. — On cherche d'abord l'aire du cercle qui a $5^m,4$ de diamètre, puis l'aire d'un carreau, et en divisant la surface du pavé de la tour par l'aire d'un carreau hexagonal, on trouve ce qu'il faut de carreaux.

DÉTAILS DE LA SOLUTION. — 1°. La surface du pavé est

$$S = 3,142 \times \left(\frac{5,4}{2}\right)^2 = 3,142 \times (2,7)^2$$
$$= 3,142 \times 7,29 = 22^{m.car.},90518;$$

2°. Pour avoir l'aire d'un carreau, nous pourrions chercher l'aire du triangle équilatéral ABC dont les côtés sont égaux à 0,16, et multiplier cette aire par

6 pour avoir celle de l'hexagone : mais supposons qu'on ait mesuré la double apothème KI, qu'on l'ait trouvée de $0^m,276$, et, par conséquent, $CI = \frac{KI}{2} = 0,138$, on aura (*fig.* 128)

$$\text{surface } ABC = \frac{AB \times CI}{2} = \frac{0,16 \times 0,138}{2}$$
$$= 0,08 \times 0,138 = 0,01104;$$

en multipliant ce produit par 6 on trouvera pour l'aire d'un carreau $0^{m.\,car.},06624$. Il reste donc à diviser 22,90518 par 0,06624, ou 2290518 par 6624, et l'on trouve qu'il faut 346 carreaux; et si on les paie 15 fr. le cent, on aura pour le prix de ces carreaux

$$\frac{15 \times 346}{100} = 51^f,75.$$

REMARQUE. — L'apothème CI d'un hexagone régulier s'obtient en multipliant le côté AB par $\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,866$ ou $CI = AB \times 0,866$.

CHAPITRE XXIII.

DÉFINITION DES POLYÈDRES.

222. *Polyèdre.* — Solide compris sous plusieurs faces planes. Un polyèdre a au moins quatre faces planes; on le nomme alors *tétraèdre* ou *pyramide triangulaire* (fig. 129).

223. *Arête d'un polyèdre.* — Ligne commune à deux faces d'un polyèdre. Ainsi, dans le polyèdre SABC (*fig.* 129), il y a six arêtes : SA, SB, SC, AB, AC, BC.

224. *Polyèdre régulier.* — Polyèdre dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux. Il n'y en a que cinq : le *tétraèdre* compris sous quatre triangles équilatéraux; l'*hexaèdre*, ou cube qui a pour faces six carrés; l'*octaèdre*, qui a pour faces huit triangles équilatéraux; le *dodécaèdre*, compris sous douze pentagones réguliers; et l'*icosaèdre*, qui a vingt faces triangulaires.

225. *Prisme en général.* — Polyèdre dont deux faces opposées sont deux polygones égaux et disposés parallèlement, et dont toutes les autres faces sont des parallélogrammes. Les deux polygones égaux et parallèles sont les bases du prisme, et la perpendiculaire comprise entre les plans de ces deux bases est la hauteur du prisme. Par exemple, ABCDE, FGHIK, sont les bases; PK′ est la hauteur (*fig.* 130).

226. *Prisme droit.* — Prisme dont les faces latérales sont des rectangles. Les arêtes comprises entre les bases mesurent la hauteur du prisme droit (*fig.* 131 et 133). AG, AF sont la hauteur de ces prismes.

227. *Parallélipipède, sa base, sa hauteur.* — Le parallélipipède est un prisme dont toutes les faces (*fig.* 132 et 133) sont des parallélogrammes. Deux faces opposées quelconques peuvent être prises pour

les bases, et la perpendiculaire comprise entre les plans de ces bases est la hauteur du parallélipipède.

228. *Parallélipipède droit.* —Parallélipipède dont toutes les faces sont rectangles et les deux bases des parallélogrammes (*fig.* 133).

229. *Parallélipipède rectangle.* — Parallélipipède dont toutes les faces sont des rectangles. Une face quelconque est sa base, et l'une des arêtes perpendiculaires à la base est la hauteur du solide (*fig.* 133).

230. *Diagonale du polyèdre.* — Droite menée d'un sommet à un autre dans le polyèdre comme KB, GD (*fig.* 131).

231. *Pyramide, sa base, sa hauteur, son sommet.* — La pyramide est un solide qui a pour une de ses faces un polygone quelconque qu'on appelle la base et dont toutes les autres faces sont des triangles qui ont leur sommet à un même point qu'on appelle le sommet de la pyramide. La perpendiculaire abaissée du sommet sur la base se nomme la hauteur de la pyramide (*fig.* 134 et 135); bases ABCDE; sommet S; hauteur SI.

232. *Pyramide régulière.* — Pyramide dont la base est un polygone régulier, et dont les triangles des faces latérales sont des triangles égaux et isoscèles. On reconnaît à l'extérieur d'une pyramide qu'elle est régulière, lorsque les arêtes de la base sont

égales entre elles, et que toutes celles qui aboutissent au sommet sont aussi égales entre elles (*fig.* 135).

233. *Tronc de pyramide à bases parallèles, ses bases, sa hauteur.* — C'est ce qui reste d'une pyramide quand on en a retranché la partie qui contient le sommet, après avoir fait une section parallèle à la base. La base de la pyramide totale et celle de la pyramide retranchée se nomment les bases du tronc. La perpendiculaire comprise entre les plans de ces bases est la hauteur du solide (*fig.* 136).

234. *Tronc de prisme.* — C'est ce qui reste d'un prisme quand on en a retranché une partie par un plan non parallèle à la base (*fig.* 137).

CHAPITRE XXIV.

MESURE DE LA SURFACE DES POLYÈDRES.

235. PREMIÈRE QUESTION. — Trouver la surface d'un polyèdre quelconque.

SOLUTION. — On calculera séparément l'aire de chacune des faces; on en fera l'addition et l'on aura la surface demandée.

236. DEUXIÈME QUESTION. — Trouver la surface d'un prisme droit.

SOLUTION. — On calculera d'abord la surface des bases; puis, pour avoir le reste de la surface, qu'on appelle surface latérale du prisme, on mesurera le périmètre de la base, et on le multipliera par la hauteur du prisme : le produit exprimera la surface latérale. Cette surface, ajoutée à celles des deux bases, donnera la surface totale. P étant le périmètre, A l'apothème de la base, H la hauteur, S la surface cherchée, on a S=PA+PH.

237. TROISIÈME QUESTION. — Trouver la surface latérale d'une pyramide régulière, c'est-à-dire de la somme des triangles qui se réunissent au sommet.

SOLUTION. — On mesurera le contour de la base, ce qui se réduit à mesurer un de ses côtés et à multiplier cette longueur par le nombre des côtés; on aura le périmètre de la base; puis on mesurera la distance du sommet au milieu d'un des côtés de la base; on aura l'apothème de la pyramide. On multipliera le périmètre P de la base par l'apothème A, et l'on divisera le produit par 2 : on aura la surface demandée $S = \frac{AP}{2}$.

238. APPLICATION. — Mesurer la surface extérieure d'une tour octogonale régulière et du toit qui la surmonte.

DONNÉES. — Le côté de la base de la tour C = 3,25; la hauteur H = 6,2; le côté de la base du toit = C′ = 3,4; l'apothème A = 5^m.

On a, 1° pour la surface prismatique,

$$S=P\times H=8C\times H=8\times 3,25\times 6,2=161^{\text{m. car.}},20;$$

2° pour la surface pyramidale S′ du toit,

$$S'=\frac{P'\times A}{2}=\frac{8C'\times A}{2}=\frac{8\times 3,4\times 5}{2}=68^{\text{m. car.}},00.$$

La surface de la tour est donc de 161 mètres carrés $\frac{20}{100}$ de mètre carré, et celle du toit est de 68 mètres carrés.

CHAPITRE XXV.

MESURE DU VOLUME DU PARALLÉLIPIPÈDE RECTANGLE.

239. *Mesurer un solide ou en chercher le volume,* c'est chercher combien de fois il contient le cube construit sur l'unité linéaire. La mesure des différents corps se déduit de celle du parallélipipède rectangle, qui renferme celle du cube.

240. PREMIÈRE QUESTION. — Trouver le volume d'un parallélipipède rectangle et celui d'un cube.

SOLUTION. — On fait le produit des trois arêtes qui se réunissent à un même sommet, et le nombre obtenu exprime combien de fois le cube construit sur l'unité de longueur est contenu dans le parallélipipède. Les trois arêtes dont on vient de parler sont les trois dimensions du parallélipipède : l'une en

est la longueur, une seconde la largeur ou l'épaisseur, et la troisième en est la hauteur.

Autre manière d'énoncer la règle précédente. — On multiplie la base du parallélipipède par sa hauteur, c'est-à-dire qu'on multiplie le nombre d'unités carrées contenues dans la base par le nombre d'unités linéaires que contient la hauteur, et l'on a pour produit le nombre d'unités cubiques contenues dans le volume cherché. Ainsi, en représentant les arêtes par A, C, H, la base par B, le volume par V, on a les formules $V = A \times C \times H$, ou $V = B \times H$, car $B = A \times C$.

RAISONNEMENT. — On pourra se rendre compte de cette règle au moyen de la *fig.* 138, qui représente un parallélipipède rectangle. ABCD est la base du parallélipipède rectangle ABCDEFGH. Les trois arêtes AB, AD, AE sont contiguës au même sommet A. Supposons que AB contienne 5 unités; AD=3, AE=5; il s'ensuivra : surface ABCD=B= $5 \times 3 = 15$ unités carrées. Ces carrés, construits sur l'unité de longueur, sont tous égaux à AIKN; chacun d'eux peut être regardé comme la base d'un petit cube AIKNPZYX. Tous ces cubes sont terminés par le plan PQRS. Cette tranche est contenue autant de fois dans le parallélipipède AG qu'il y a d'unités dans la hauteur AE, ou 5 fois; donc le nombre total d'unités cubiques contenues dans le solide AG est 15×5 ou $5 \times 3 \times 5 = 75$; donc le volume $V = 75$ unités cubiques.

241. PREMIÈRE APPLICATION. — Trouver le volume d'un cube dont le côté est égal à 10 mètres.

SOLUTION. $V = 10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 1000$; donc 1 mètre cube = 1000 décimètres cubes; 1 décimètre cube = 1000 centimètres cubes. Donc aussi 1 décimètre cube est la millième partie du mètre cube; 1 centimètre cube est la millième partie du décimètre cube, et ainsi de suite.

242. DEUXIÈME APPLICATION. — Trouver le volume d'un parallélipipède rectangle dont les trois dimensions sont : longueur = $4^m,25$; largeur = $1^m,65$; hauteur = $2^m,7$.

SOLUTION. $V = 4,25 \times 1,65 \times 2,7 = 18^{m.\,cub.},93375$.

REMARQUE sur les deux manières dont on peut lire une fraction décimale qui se trouve dans l'expression du volume d'un solide. — Le résultat qu'on vient d'obtenir se lit : 18 mètres cubes et 93375 centmillièmes de mètre cube. On peut encore énoncer la fraction décimale en décimètres cubes, centimètres cubes, etc. Pour cela, il faut que le nombre renferme un nombre de décimales multiple de 3, comme 3, 6, 9, etc. Les trois premières expriment des décimètres cubes; les trois suivantes des centimètres cubes, et ainsi de suite. Comme le nombre trouvé ne contient que cinq décimales, on écrira d'abord un zéro à sa suite, ce qui donne $V = 18^{m.\,cub.},933750$; on l'énoncera en disant 18 mètres

cubes 933 décimètres cubes 750 centimètres cubes.

243. TROISIÈME APPLICATION. — Calculer le nombre de mètres cubes de maçonnerie contenus dans un mur de $32^{m},50$ de longueur sur $5^{m},40$ de hauteur et $0^{m},45$ d'épaisseur. Trouver aussi le prix de l'ouvrage, à $45^{f},60$ le mètre cube.

SOLUTION. — Après avoir cherché le nombre de mètres cubes de maçonnerie, on multipliera $45^{f},60$, prix d'un mètre, par le nombre de mètres cubes trouvés; on aura le prix cherché. Or $V = 32,5 \times 5,4 \times 0,45 = 78^{m.\,cub.},975$, et pour le prix demandé $45^{f},60 \times 78^{m.\,cub.},975 = 3601^{f},26$.

244. QUATRIÈME APPLICATION. — Chercher quelle quantité de poudre contiendrait une boîte cubique dont le côté = 17 pouces, sachant que le pied cube de poudre pèse 64 livres.

SOLUTION. — On cherchera le nombre de pouces cubes contenus dans la boîte donnée, ce sera $17 \times 17 \times 17 = 4913$, et comme le pied cube contient 1728 pouces cubes, la boîte pourra contenir autant de fois 64 livres de poudre que 1728 seront contenus de fois dans 4913. Ainsi l'on aura $\frac{4913}{1728}$ pour le nombre de pieds cubes et $\frac{64 \times 4913}{1728}$ pour la charge exprimée en livres. Le calcul donne

$$\frac{314432}{1728} = 118^{lb}\ 15^{o}\ 3^{gr}\ \tfrac{1}{4}.$$

245. CINQUIÈME APPLICATION. — Le côté d'une boîte cubique est de $0^{m},37$; on sait qu'un décimètre cube de poudre pèse $0^{kil},914$; que contiendra la boîte ?

SOLUTION. — Le nombre de décimètres cubes que contiendra la boîte sera exprimé par la formule

$$V=(3,7)^{3} \text{ ou } 3,7\times3,7\times3,7=50^{m.\,cub.},653$$

et la charge le sera par $50,653\times0^{kil},914=46^{kil},297$.

246. SIXIÈME APPLICATION. — On a une charge de $46^{kil},297$ à placer dans une boîte cubique, quel en sera le côté ?

SOLUTION. — Autant de fois $0^{kil},914$ sera contenu dans la charge donnée, autant de fois la boîte devra contenir 1 décimètre cube; il faudra donc diviser $46^{kil},297$ par 0,914, ce qui donnera $\frac{46297}{914}=50,653$ pour le nombre de décimètres cubes de la boîte. En extrayant la racine cubique du quotient, ce sera le côté demandé. On trouve pour résultat $3^{déc.},7$ ou 37 centimètres pour le côté de la boîte.

CHAPITRE XXVI.

VOLUME DES POLYÈDRES QUELCONQUES.

247. PREMIÈRE QUESTION. — Chercher le volume d'un parallélipipède quelconque, et celui d'un prisme quelconque.

SOLUTION. — On multiplie la base du parallélipipède ou du prisme par sa hauteur, on a le volume demandé.

248. PREMIÈRE APPLICATION. — ABCDEFGH (*fig.* 139) est un parallélipipède dont les faces sont des parallélogrammes quelconques; le côté AB de la base $= 2^{m},5$; la perpendiculaire CO à la ligne $AB=0^{m},72$; et la hauteur HI du solide $= 3^{m},57$. Quel est le volume de ce solide?

SOLUTION. — On a

$$B=2,5\times 0,72=1,8,$$

et

$$V=B\times H=1,8\times 3,57=6^{m.\,cub.},426.$$

249. DEUXIÈME APPLICATION. — Trouver le volume d'un prisme qui aurait pour sa base le polygone ABCDE (*fig.* 140) et pour hauteur MN=H.

SOLUTION. — On décomposera le polygone ABCDE en triangles par le moyen de diagonales menées d'un

même sommet. On fera la somme des bases pour avoir la base totale qu'on multipliera par la hauteur du prisme. Soient par exemple $H = 1^m,13$; $BE = 0,75$; $EC = 0,87$; la hauteur $AF = 0,36$; $BG = 0,47$; $DI = 0,25$; il s'ensuivra

1re *Surface.* $ABE = \frac{BE \times AF}{2} = \frac{0,75 \times 0,36}{2}$

$= 0,75 \times 0,18 = 0,1350$

2e *Surface.* $EBC = \frac{EC \times BG}{2} = \frac{0,87 \times 0,47}{2}$

$= \frac{0,4089}{2} = 0,20445$

3e *Surface.* $ECD = \frac{EC \times DI}{2} = \frac{0,87 \times 0,25}{2}$

$= \frac{0,2175}{2} = 0,10375$

Et pour la base totale $ABCDE = B = 0,44320$

Donc le volume $V = B \times H = 0,44320 \times 1,13 = 0^{m.cub.},506466$; donc $V = 506466$ millionièmes de mètre cube ou 506 décimètres cubes, plus 466 centimètres cubes.

250. DEUXIÈME QUESTION. — Trouver le volume d'une pyramide quelconque.

SOLUTION. — On multiplie la base par la hauteur et l'on divise ce produit par 3. Soit par exemple (*fig.* 141) ABCD un rectangle qui serve de base à la pyramide SABCD; $AB = 5^m$; $AD = 2^m,6$; $SI =$

SI = H = 3,7; on aura

$$B = 5 \times 2{,}6 = 13{,}00;$$

puis

$$V = \frac{B \times H}{3} = \frac{13 \times 3{,}7}{3} = 16^{\text{m. cub.}},033,$$

ou 16 mètres cubes 33 décimètres cubes (*fig.* 141).

251. TROISIÈME QUESTION. — Trouver le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles.

SOLUTION. — Soient B et B′ les bases du tronc, on fera le produit $B \times B'$ de ces bases, on extraira la racine carrée de ce produit, ce qui s'exprime ainsi $\sqrt{B \times B'}$, c'est la surface moyenne entre les deux bases; on ajoutera cette racine carrée à la somme des deux bases, on aura

$$B + B' + \sqrt{B \times B'};$$

on multipliera cette somme par la hauteur H du tronc, on divisera le produit par 3; on aura le volume

$$V = \frac{(B + B' + \sqrt{B \times B'})H}{3}.$$

252. APPLICATION. — Supposons que les deux bases parallèles d'un tronc de pyramide soient deux hexagones réguliers dont les côtés soient 2^m et 1^m; que l'apothème du premier soit $1^m,732$, et celui du second 0,866; que la hauteur du tronc soit $H = 3^m,5$, on trouvera pour les aires de ces polygones :

$$\left.\begin{array}{l} 1^{o}.\ \dfrac{1,732\times 2\times 6}{2} = 1,732\times 6 = 10,392 \\ 2^{o}.\ \dfrac{0,866\times 1\times 6}{2} = 0,866\times 3 = 2,598 \\ 3^{o}.\ \sqrt{10,392\times 2,598} = \sqrt{26,998416} = 5,196 \end{array}\right\} 18^{m.car.},186 = B + B' + \sqrt{B\times B'}.$$

Donc

$$V = \frac{18,186\times 3,5}{3} = 6,062\times 3,5 = 21^{m.cub.},217$$

volume du tronc de pyramide exprimé en mètres cubes (*fig.* 142).

253. QUATRIÈME QUESTION. — Trouver le volume d'un tronc de prisme triangulaire.

SOLUTION. — On fait la somme des nombres qui expriment la grandeur des perpendiculaires abaissées de chacun des trois sommets hors de la base sur cette base; on multiplie cette somme par la base, on prend le tiers du produit, et le résultat est l'expression du volume demandé, ce qui est exprimé par la formule suivante

$$V = \frac{B\times(H + H' + H'')}{3}.$$

254. APPLICATION. — Soit ABC (*fig.* 143) la base du prisme ABCDEF; $AB = 3^{m},6$, et la hauteur CO du triangle $= 2^{m},5$; supposons que les arêtes DA, BE, CF soient perpendiculaires à la base; elles seront les hauteurs des trois sommets au-dessus de cette base. Soient $AD = 2^{m},4$; $BE = 1^{m},72$; $CF = 0^{m},86$; la somme $DA + BE + CF$ ou $H + H' + H'' = 4^{m},98$; la base $B = \dfrac{3,6\times 2,5}{2} = 1,8\times 2,5 = 4^{m\,car.},50$; le volume

cherché est donc

$$V = \frac{4,5 \times 4,98}{3} = 1,5 \times 4,98 = 7^{\text{m. cub.}},470.$$

255. CINQUIÈME QUESTION. — Trouver le volume d'un tronc de prisme quelconque.

SOLUTION. — On concevra le tronc de prisme décomposé en autant de troncs de prismes triangulaires qu'on pourra former de triangles dans la base du tronc donné, en menant des diagonales dans cette base; on cherchera le volume de chacun de ces troncs considérés séparément, et la somme de ces produits sera l'expression du volume demandé.

256. APPLICATION. — Trouver le volume du tronc de prisme pentagonal ABCDEFGHIK d'après les cotes données dans la *fig.* 144.

1er *tronc.* $ABEFGK = V = \left(\frac{BE \times AR}{2}\right) \times \left(\frac{FL + KO + GM}{3}\right) = \frac{0,72 \times 7,4}{3} = 0,24 \times 7,4 = 1,776$

2e *tronc.* $BCEGHK = V' = \left(\frac{BE \times CT}{2}\right) \times \left(\frac{KO + GM + HN}{3}\right) = \frac{0,54 \times 6,5}{3} = 0,18 \times 6,5 = 1,170$

3e *tronc.* $ECDHIK = V'' = \left(\frac{CE \times DS}{2}\right) \times \left(\frac{KO + HN + IP}{3}\right) = \frac{0,512 \times 5,7}{3} = 0,512 \times 1,9 = 0,9728$

Somme des trois volumes $V + V' + V''$ ou volume cherché . . . . . $V = 3,9188$ m. cub.

257. SIXIÈME QUESTION. — Trouver le volume d'un polyèdre quelconque.

SOLUTION. — On décomposera le solide en polyèdres de l'espèce de ceux qui précèdent, comme parallélipipèdes, prismes, pyramides, troncs de prismes ou de pyramides; on cherchera séparément les volumes de ces solides, et la somme sera le volume demandé.

CHAPITRE XXVII.

VOLUME DE POLYÈDRES QUELCONQUES.

258. *Description du ponton ou bateau plat.* — Le ponton est une espèce de bateau dont la base inférieure HEFG est un rectangle aussi bien que la base supérieure ABCD. Ces bases d'inégale grandeur sont dans des plans parallèles, et disposés symétriquement, de sorte que les quatre faces latérales AEFB, FBCG, CGHD, AEHD, sont des trapèzes symétriques, et de plus égaux deux à deux. La distance RO comprise entre les deux bases parallèles est la hauteur ou la profondeur du ponton; AD et HE en sont les largeurs; AB en est la longueur (*fig.* 146).

259. PREMIÈRE QUESTION. — Trouver le volume d'un ponton.

SOLUTION. — Concevons que le rectangle EFGH (*fig.* 145 et 146) représente le fond du ponton, et ABCD son bord supérieur; MLKI une coupe faite perpendiculairement aux arêtes AB, EF, etc., par le milieu de ces arêtes. Le ponton se trouvera par là divisé en deux parties qui ont le même volume. Imaginons aussi une autre coupe faite suivant deux longues arêtes opposées AB, HG; le ponton se trouvera décomposé en quatre parties dont deux à droite du plan IKLM, et deux à gauche de ce plan. Il suffit donc de calculer le volume du solide MLKIBCGF et de le doubler pour avoir le volume demandé.

Or ce dernier solide est décomposé en deux prismes triangulaires tronqués, l'un KLIBGF, l'autre MLIBCG, les bases étant KLI, MLI; les hauteurs relatives au premier sont les arêtes IB, KF, LG; et pour l'autre LG, MC, IB; le volume KLIBGF $= \frac{1}{3}$KLI $\times$ (IB + KF + LG) $= \frac{1}{3}$KLI $\times$ (IB + 2KF); le volume MLIBCG $= \frac{1}{3}$MLI $\times$ (LG + MO + IB) $= \frac{1}{3}$MLI $\times$ (KF + 2IB).

Donc le volume V du ponton qui est égal au double de la somme de ces deux solides, sera

$$V = \tfrac{2}{3}\text{KLI} \times (\text{IB} + 2\text{KF}) + \tfrac{2}{3}\text{MLI} \times (\text{KF} + 2\text{IB}).$$

Et comme chacun des deux triangles a pour hauteur la profondeur du ponton, MI et KL étant les bases de ces triangles, on aura

$$\text{KLI} = \frac{\text{KL} \times \text{RO}}{2};$$

donc

$$2KLI = KL \times RO.$$

de même

$$MLI = \frac{MI \times RO}{2},$$

d'où

$$2MLI = MI \times RO;$$

au moyen de quoi l'on trouve

$$V = \left(\frac{KL \times RO}{3}\right) \times (IB + 2KF) + \left(\frac{MI \times RO}{3}\right) \times (KF + 2IB).$$

Soient par exemple, $MI = DA = 1^m,50$; $KL = HE = 1^m,30$; $AB = 6$; $IB = \frac{1}{2}AB = 3^m$; $EF = 2KF = 4^m,4$; $KF = 2^m,2$; $RO = 0,8$; il s'ensuivra :

$$V = \left(\frac{1,3 \times 0,8}{3}\right) \times (3 + 4,4) + \left(\frac{1,50 \times 0,8}{3}\right) \times (2,2 + 6) = \frac{1,04 \times 7,4 + 1,20 \times 8,2}{3} = 5^{m.\,cub.},845.$$

260. DEUXIÈME QUESTION. — Chercher le volume d'un tas de pierres comme on en trouve sur les routes.

Description du solide. — La base est un rectangle ABCD (*fig.* 147); l'arête supérieure EF est plus courte que les deux autres, et les triangles BFC, DAE, sont égaux et isoscèles.

SOLUTION. — Si l'on imagine une coupe MNP perpendiculaire aux arêtes AB, CD, EF, et faite par le

milieu de ces arêtes, le solide sera décomposé en deux troncs de prismes triangulaires dont le triangle MNP sera la base commune. On obtiendra le volume de ce solide en multipliant l'aire de la section MNP par la somme des trois arêtes AB, DC, EF; soit donc PI la hauteur de ce tas et celle du triangle MNP, on aura

$$V = \left(\frac{MN \times PI}{2}\right) \times \left(\frac{2PF + 2MC + 2NB}{3}\right)$$
$$= \frac{(MN \times PI) \times (EF + DC + AB)}{6},$$

formule qui est bonne lors même que les arêtes AB, DC ne sont pas égales; il suffit que AB, DC, EF soient parallèles. Exemple : soient

MN = 0,75; PI = 0,45; EF = 0,50; AB = DC = 1,40;

il s'ensuit :

$$V = \frac{0{,}75 \times 0{,}45 \times (0{,}50 + 1{,}40 + 1{,}40)}{6}$$
$$= 0{,}05625 \times 3{,}3 = 0^{\text{m. cube}},185625.$$

261. TROISIÈME QUESTION. — **Calculer le volume d'un remblai.**

Données générales et décomposition du solide en prismes triangulaires.

Le remblai dont on se propose de trouver le volume (*fig.* 148) se compose de deux parties séparées par le plan horizontal ABCDEF; c'est au-dessous du plan un fossé rempli, et au-dessus un solide terminé, aussi

bien que le solide inférieur, par des surfaces planes. Pour faire connaître la position des sommets qui sont hors du plan vertical, nous appellerons cotes inférieures celles des points qui sont au-dessous du plan horizontal, et cotes supérieures celles des points qui sont au-dessus du plan horizontal. On a fait passer par ces sommets A, B, C, D, E, F, K, G, ou plutôt par les arêtes qui les joignent des plans verticaux DC, BC, CG, GB, GA, GF, GE, et dans la partie inférieure des plans verticaux FK, KC, GC, GF, GA, GB, au moyen desquels chacun des deux solides est décomposé en troncs de prismes triangulaires. Les cotes citées donnent les hauteurs qui se mesurent sur les arêtes verticales. Il se trouve de ces troncs qui n'ont que deux sommets hors de la base, ou qui ont une arête verticale nulle; d'autres en ont deux nulles : c'est-à-dire que ces troncs sont des pyramides triangulaires; mais la formule pour les calculer reste la même. Indépendamment des cotes pour les hauteurs, on trouve sur la base commune l'indication des données nécessaires au calcul des triangles qui servent de bases aux troncs de prismes. Chacun de ces solides est suffisamment désigné par sa base et par le tableau qui suit :

AUX POINTS	COTES SUPÉRIEURES.	COTES INFÉRIEURES.
A	0, 00	0, 81
B	2, 00	0, 30
C	0, 60	0, 00
D	0, 00	0, 00
E	3, 25	0, 00
F	0, 00	0, 00
G	1, 50	1, 50
K	Pas de sommet supérieur.	0, 45

DÉTAILS DU CALCUL.

Solide supérieur.

Vol.DEC = $\frac{1}{6}$3,4 × 1,5 × (0+3,25+0,60) = $\frac{1}{6}$3,4 × 1,5 × 3,85 =	3,272500
Vol.ECG = $\frac{1}{6}$6,04 × 2,28 × (3,25+0,6+1,5) = $\frac{1}{6}$6,04 × 2,28 × 5,35 =	12,279320
Vol.GCB = $\frac{1}{4}$4,08 × 2,10 × (1,5+0,6+2) = $\frac{1}{4}$4,08 × 2,10 × 4,10 =	5,854800
Vol.GBA = $\frac{1}{6}$6,9 × 0,72 × (1,5+2+0) = $\frac{1}{6}$6,9 × 0,72 × 3,50 =	2,898000
Vol.AGF = $\frac{1}{6}$6,1 × 2,82 × (0+1,5+0) = $\frac{1}{6}$6,1 × 2,82 × 1,5 =	4,300500
Vol.FGE = $\frac{1}{6}$6,04 × 3,1 × (0+1,5+3,25) = $\frac{1}{6}$6,04 × 3,1 × 4,75 =	14,823167

Solide inférieur.

Vol.KEC = $\frac{1}{6}$2,88 × 2,9 × (0,45+0+0) = $\frac{1}{6}$2,88 × 2,9 × 0,45 =	0,626400
Vol.KCG = $\frac{1}{6}$2,88 × 3 × (0,45+0+1,5) = $\frac{1}{6}$2,88 × 3 × 1,95 =	2,808000
Vol.KGF = $\frac{1}{6}$2,5 × 2,7 × (0,45+1,5+0) = $\frac{1}{6}$2,5 × 2,7 × 1,95 =	2,193750
Vol.KFE = $\frac{1}{6}$2,5 × 3,1 × (0,45+0+0) = $\frac{1}{6}$2,5 × 3,1 × 0,45 =	0,581250
Vol.FGA = $\frac{1}{6}$6,1 × 2,82 × (0+1,5+0,81) = $\frac{1}{6}$6,1 × 2,82 × 2,31 =	6,622770
Vol.GAB = $\frac{1}{6}$6,9 × 0,72 × (1,5+0,81+0,3) = $\frac{1}{6}$6,9 × 0,72 × 2,61 =	2,161080
Vol.GBC = $\frac{1}{4}$4,08 × 2,1 × (1,5+0,3+0) = $\frac{1}{4}$4,08 × 2,1 × 1,8 =	2,570400
Somme de tous les volumes partiels.....	60,991937

Moyen d'abréger les calculs quand les prismes ont une base commune.

On remarquera que, pour les prismes tronqués qui ont une même base, on peut trouver l'expression du volume de ces deux troncs, en multipliant la base commune par le tiers de la somme des trois arêtes. Ainsi, vol. ABG inférieur et supérieur $= \frac{1}{6}\ 6{,}9 \times 0{,}72 \times (0 + 0{,}81 + 2 + 0{,}3 + 1{,}5 + 1{,}5) = \frac{1}{6} 6{,}9 \times 0{,}72 \times 6{,}11$. En désignant, en général, par b la base de chaque triangle, par h sa hauteur, par H, H′, H″ les arêtes verticales qui correspondent aux trois sommets du triangle de la base, on a pour le volume V de l'un quelconque de ces troncs $V = \frac{1}{6}\, b \times h \times (H + H' + H'')$, expression dans laquelle une ou deux des quantités H, H′, H″ peuvent être nulles.

CHAPITRE XXVIII.

DÉFINITIONS RELATIVES AUX TROIS CORPS RONDS.

262. On appelle *corps ronds,* dans la géométrie élémentaire, le cylindre droit, le cône droit et la sphère. On rapporte à ces corps ceux qui n'en sont que des portions.

263. *Cylindre droit.* — Ses bases, son axe ou sa hauteur, sa surface convexe, sa génération.

Le cylindre droit est un solide de la forme d'un tuyau de poêle; il est terminé à ses extrémités par

des cercles qu'on appelle ses *bases;* la ligne qui joint les centres des bases se nomme *l'axe* ou *la hauteur*; la surface courbe qui termine le cylindre se nomme *convexe* ou *latérale.*

Génération du solide. — On peut imaginer que le cylindre droit est produit par la révolution d'un rectangle, tel que ABCD (*fig.* 149), en tournant autour d'un de ses côtés AB comme axe. Les côtés AD, BC engendrent les cercles qui sont les bases, et le côté CD engendre la surface latérale; on le nomme, à cause de cela, *génératrice de la surface convexe.*

264. *Cône droit.* — Son sommet, sa base, son axe ou sa hauteur, sa surface convexe, sa génération.

Le cône droit (*fig.* 150) est un solide de la forme d'un pain de sucre bien terminé en pointe. Cette pointe est le sommet; le cercle sur lequel repose le cône en est la base; la droite qui joint le sommet au centre de la base est l'axe ou la hauteur du cône. On appelle encore la surface courbe de ce solide, *surface convexe* ou *latérale.*

Génération de ce solide. — On peut concevoir que le cône est engendré par la révolution d'un triangle rectangle ABC, en tournant autour d'un des côtés AB de l'angle droit. Ce côté est l'axe; le côté mobile BC produit le cercle de base; l'hypoténuse AC produit la surface courbe. On appelle, à cause de cela, cette ligne *la génératrice de la surface convexe ou latérale du cône.*

265. *Sphère.* — Son centre, ses rayons, ses diamètres, sa génération; grand cercle, petit cercle.

La sphère est un solide de la forme d'une boule parfaitement ronde, d'un boulet dont la surface serait parfaitement polie. Le point intérieur, également éloigné de tous ceux de sa surface, s'appelle *centre*. Toute droite menée du centre à la surface est un rayon. On appelle *diamètre* toute droite qui, passant par le centre, se termine de part et d'autre à la surface. Tout diamètre est égal au double du rayon.

Génération de ce solide. — On peut concevoir que la sphère est engendrée par la demi-circonférence AFB pendant la révolution du demi-cercle. On nomme grand cercle, tout cercle qui a même diamètre que la sphère; et petit cercle, tout cercle qu'on obtient en faisant une section par un plan qui ne passe pas par le centre (*fig.* 151).

266. *Tronc de cône à bases parallèles.* — On appelle ainsi ce qui reste d'un cône, lorsqu'on en a retranché la partie qui contient le sommet en le coupant parallèlement à la base. Soit EFG (*fig.* 152) une section faite parallèlement à la base CBD du cône ACD. Supposons, de plus, qu'on ait enlevé le petit cône AEFG; le reste, CDEG, sera un tronc de cône à bases parallèles. Les deux cercles CMND, EKGF sont les bases du tronc. La portion FB de l'axe, ou la droite qui joint les centres des deux bases, est la hauteur ou l'axe de ce tronc. On voit

encore que ce solide peut être engendré par le trapèze FBCE, en tournant autour de BF comme axe.

267. *Portions* de la sphère et de la surface de la sphère.

1°. *Segment sphérique à une base.* — On appelle ainsi deux parties de la sphère coupée par un plan qui ne passe pas par le centre de cette sphère. Ainsi (*fig.* 151), si KL représente une section faite dans la sphère engendrée par le demi-cercle AFB, cette sphère sera partagée en deux segments KAL, KBL, et le cercle KL servira de base à l'un et à l'autre segment, le premier plus petit, le second plus grand que la demi-sphère ou qu'un hémisphère. Les parties AO, OB de l'axe perpendiculaires à la base, mesurent la hauteur de chacun des segments.

268. 2°. *Segment à deux bases.* — Partie de la sphère comprise entre deux plans ou sections parallèles (*fig.* 153). Si MT et PU représentent deux plans parallèles qui coupent la sphère dont APBU est un grand cercle, le solide PMTU compris entre ces plans se nomme segment à deux bases ; les cercles MT, PU en sont les bases. La distance RS des deux bases est la hauteur du segment.

269. *Zone.* — Partie de la surface de la sphère qui termine un segment. On appelle zone à une base celle qui termine un segment à une base : telles

sont les zones MAT, PAU (*fig.* 153); et zone à deux bases, celle qui termine un segment à deux bases : telle est la zone MPUT. La hauteur de la zone est la hauteur du segment qui termine cette zone. Ainsi AS, AR, RS sont les hauteurs des zones MAT, PAU, MPUT.

270. *Secteur sphérique.* — Solide engendré par la révolution d'un secteur circulaire, tel que ACK (*fig.* 154), en tournant autour d'un de ses côtés AC comme axe. La zone KAL est la base du secteur. On voit que le volume du secteur sphérique se compose du volume du cône produit par la révolution du triangle rectangle CKO autour de CO, et du segment sphérique engendré par la révolution du demi-segment AKO autour de AO.

271. *Fuseau sphérique.* Une partie de la surface de la sphère comprise entre deux demi-circonférences de grands cercles (*fig.* 155). La portion ABCDA de la surface de la sphère comprise entre les deux demi-circonférences ABC, ADC, est un fuseau ; la surface ADCEA en est un autre.

272. *Onglet sphérique.* — Partie du solide de la sphère comprise entre deux demi grands cercles. Le solide compris entre les demi-cercles ABC, ADC est un onglet; le solide compris entre les demi-cercles ADC, AEC en est un autre ; les fuseaux ABCDA, ADCEA servent de bases à ces onglets (*fig.* 155).

CHAPITRE XXIX.

MESURE DE LA SURFACE DES CORPS RONDS.

273. PREMIÈRE QUESTION. — Mesurer la surface convexe d'un cylindre droit.

SOLUTION. — On trouve la surface convexe d'un cylindre droit en multipliant la circonférence de la base par la hauteur; ce qui s'exprime par les formules

$$S = C \times H = 2\pi \times R \times H = \pi D \times H.$$

274. APPLICATION. — On a peint une tour ronde à l'extérieur, à raison de $1^f,25$ par mètre carré. Cette tour ABOD (*fig.* 156) a 10 mètres de diamètre sur 24 mètres de hauteur; que doit-on payer pour cet ouvrage?

SOLUTION. — On cherchera d'abord combien cette superficie contient de mètres carrés, puis on multipliera $1^f,25$, prix d'un mètre, par le nombre trouvé. La circonférence de la base est $C = 3,142 \times 10 = 31,42$; donc la surface $S = 31,42 \times 24 = 754^{m.\,car.},08$; et en multipliant $1^f,25$ par ce nombre, on a pour le prix cherché

$$1^f,25 \times 754,08 = 942^f,60.$$

275. DEUXIÈME QUESTION. — Mesurer la surface convexe d'un cône droit.

SOLUTION. — On obtient cette surface S en multipliant la circonférence C de sa base par le côté A du cône, et en divisant le produit par 2. Cette surface est encore égale au produit du côté A par la circonférence C′ du cercle parallèle à la base, et mené par le milieu du côté A; on a donc ces deux formules

$$S = \frac{C \times A}{2} = C \times A'.$$

276. APPLICATION. — Mesurer la surface d'un toit conique qui couvre une tour ronde; le diamètre PQ de la base étant de $10^{m},60$, et le côté $QS = A = 15$ mètres (*fig.* 156).

SOLUTION. — La surface

$$S = \frac{\text{circ. PQ} \times \text{QS}}{2} = \frac{3,142 \times 10,60 \times 15}{2}$$
$$= 3,142 \times 5,3 \times 15 = 249^{\text{m. car.}},7890.$$

277. TROISIÈME QUESTION. — Mesurer la surface convexe d'un tronc de cône à bases parallèles.

SOLUTION. — On fait la somme des circonférences C et C′ des deux bases; on la multiplie par le côté A du tronc du cône, on divise ce produit par 2, et l'on a la surface demandée

$$S = \left(\frac{C + C'}{2}\right) \times A; \; S = \pi A (R + R').$$

Autrement, on multiplie la circonférence C″ du cercle qui serait à égale distance des deux bases par le côté A du tronc, $S = C'' \times A$.

278. APPLICATION. — Chercher combien il entre de mètres carrés de planches dans la robe d'une poupée ABCD (*fig.* 157) qui couvre une grille servant au barrage d'une rivière? Cette enveloppe a la forme d'un tronc de cône qui a $0^m,72$ de diamètre à sa base inférieure, et $0^m,30$ à sa base supérieure, la longueur du côté $AC = A = 2^m,60$.

SOLUTION.

$$S = \left(\frac{\text{circ. AB} + \text{circ. CD}}{2}\right) \times AC$$

$$= \left(\frac{3,142 \times 0,72 + 3,142 \times 0,30}{2}\right) \times 2,60$$

$$= (2,26224 + 0,9426) \times 1,3 = 4^{m.\,car.},166.$$

PREMIÈRE REMARQUE. — Le calcul se fait d'une manière plus expéditive par l'emploi de la formule $S = \pi \times A \times (R + R')$ qui renferme cette règle; on fait la somme des rayons des deux bases; on multiplie cette somme par le côté A, et le produit par le rapport π; on a la surface du tronc du cône.

DEUXIÈME REMARQUE. — Si les données étaient : circonférence moyenne $PQ = 1^m,6024$ et $AC = 2^m,60$, on trouverait $S = 1,6024 \times 2,6 = 4^{m.\,car.},166$.

279. QUATRIÈME QUESTION. — Mesurer la surface d'une sphère dont on connaît le rayon.

SOLUTION. — On multiplie la circonférence C =

$2\pi R$ d'un des grands cercles de la sphère par le diamètre $D = 2R$, et l'on a l'aire de cette sphère $S = C \times D = 4\pi R^2$.

La formule $S = 4\pi R^2$ renferme la règle suivante: on obtient la surface de la sphère en multipliant le carré du rayon de la sphère par π et en multipliant encore le produit par 4.

Remarque sur la double expression de la surface de la sphère:

1°. La formule $S = C \times D$ fait voir que cette surface est égale à celle d'un cylindre qui aurait pour hauteur le diamètre D de la sphère, et pour sa base un grand cercle de la sphère;

2°. La formule $S = 4\pi R^2$ fait voir que la surface de la sphère est quadruple de celle d'un de ses grands cercles.

280. APPLICATION. — On fait construire une voûte hémisphérique de $0^m,38$ d'épaisseur. Le rayon de l'hémisphère intérieur $R = 2^m,70$.

On demande : 1° la mesure de la surface intérieure; 2° celle de la surface extérieure.

Données : $CA = 2,70$; $BA = 0,38$; $CB = 3,08$.

SOLUTION. — La surface de la sphère étant $4\pi R^2$, celle de l'hémisphère sera $2\pi R^2$; donc, en multipliant le carré du rayon de la surface intérieure, ou $(2,7)^2$ par 3,142 et par 2, on aura la surface intérieure

$$S = 7,29 \times 3,142 \times 2 = 45^{m.car.},81.$$

2°. Le rayon de la sphère extérieure $R' = 2,7 + 0,38 = 3,08$. Le carré de ce rayon $= 9,4864$ et la surface de l'hémisphère

$$S' = 2\pi R'^2 = 2 \times 3,142 \times 9,4864 = 29,8062 \times 2,$$

ou

$$S' = 50^{m.\,car.},6125 \text{ (\textit{fig.} 158)}.$$

281. CINQUIÈME QUESTION. — Mesurer la surface d'une zone à une ou deux bases.

SOLUTION. — On trouve la surface z d'une zone à une ou deux bases, en multipliant la circonférence C ou $2\pi R$ d'un grand cercle de la sphère par la hauteur H de la zone; $z = C \times H = 2\pi R \times H$.

La surface de la zone à une base s'obtient encore en ajoutant le carré H'^2 de la hauteur au carré r^2 du rayon du cercle de la base de ce segment, et en multipliant cette somme par le rapport π, on a

$$z = \pi \times (r^2 + H'^2).$$

282. PREMIÈRE APPLICATION. — Une citerne dont la surface intérieure se compose de celle d'un tronc de cône et d'un segment sphérique à une base (*fig.* 159) a été enduite d'un ciment gras qui coûte $6^f,50$ par mètre carré; calculer le prix de l'ouvrage.

Données : soient EDBIL la coupe faite suivant l'axe de cette citerne; TK l'axe du tronc de cône; CB le rayon de la sphère à laquelle appartient la zone DBI, ou $R = 2$; $DE = A = 1^m,77$; KB la hauteur de la zone $H = 1,30$; $ET = r = 2,80$; $DK = r' = 1,90$.

SOLUTION. — 1°. La surface S du tronc de cône en employant la formule

$$S = \pi \times A \times (r + r')$$

est

$$S = 3,142 \times 1,77 \times (2,8 + 1,9) = 5,56134 \times 4,7$$
$$= 26^{m\ car.},1383 ;$$

2°. La surface S′ de la zone est

$$S' = \pi \times D \times H = 3,142 \times 4 \times 1,3 = 16^{m.\ car.},3384$$

et la surface totale

$$S = S + S' = 26,1383 + 16,3384 = 42^{m.\ car.},4767.$$

Le prix demandé est donc

$$x = 6^{f},5 \times 42,4767 \quad \text{ou} \quad x = 276^{f}10^{c}.$$

283. DEUXIÈME APPLICATION. — Question relative à l'aire de la zone à deux bases.

On veut repeindre la partie d'une voûte hémisphérique AMD comprise entre les plans AD, BC; mesurer la surface à peindre.

Données : soient

$$OI = H = 1^{m},2, \quad R = OM = 2^{m},6.$$

SOLUTION.

$$z = 2\pi R \times H = 2 \times 3,142 \times 2,6 \times 1,2$$
$$= 19^{m.\ car.},6061 \ (\textit{fig.}\ 160).$$

284. SIXIÈME QUESTION. — Mesurer la surface d'un fuseau sphérique.

SOLUTION. — Le fuseau sphérique MBNCM qui sert de base à l'onglet MBNCMN, si BC arc du grand cercle est perpendiculaire au diamètre MN; cet arc étant terminé aux côtés MBN, MCN du fuseau, donnera pour sa surface demandée le produit du diamètre MN = D par l'arc BC = A ou S = D × A (*fig.* 161).

285. APPLICATION. — ABCDGHI est une coupe faite suivant l'axe d'une galerie de mine; CDGH est une descente; MFN représente la section faite par des plans parallèles au sol à la hauteur de la naissance de la voûte. Il se trouve en BOC un fuseau sphérique pour le raccordement des deux voûtes cylindriques; les deux demi grands cercles sont représentés par les droites FB, FC, et le diamètre commun par le point F; on demande l'aire de ce fuseau.

Données : Diamètre ou largeur de la galerie, $2^{m},00$; arc BOC = 36°.

SOLUTION. — On calculera d'abord la longueur de l'arc BOC = A = $\frac{1}{10}$ circ. = $\frac{\pi D}{10}$ = 0,3142 × 2 = $0^{m},6284$, et en multipliant la longueur de l'arc par le diamètre, on aura la surface demandée, d'où

$$S = A \times D = 0,6284 \times 2;$$

d'où

$$S = 1^{m.\ car.},2568 \text{ (\textit{fig.} 162)}.$$

CHAPITRE XXX.

MESURE DES VOLUMES DU CYLINDRE ET DU CONE.

286. PREMIÈRE QUESTION. — Chercher le volume d'un cylindre.

SOLUTION. — On multiplie la base B par la hauteur H; on a le volume V demandé; $V = B \times H$. Si la base est un cercle dont le rayon égale R, le volume du cylindre sera encore exprimé par la formule $V = \pi R^2 \times H$.

287. APPLICATION. — Trouver le volume de la maçonnerie d'une tour ronde dont le mur a $0^m,75$ d'épaisseur, le diamètre intérieur étant de 10 mètres et la hauteur de 24 mètres (on fera abstraction des ouvertures).

SOLUTION. — On considérera le volume de la maçonnerie comme la différence des volumes de deux cylindres qui auraient pour rayons $R = 5,75$, $R' = 5$, et pour hauteur commune

$$H = 24, \text{ d'où } V = \pi R^2 \times H - \pi R'^2 \times H,$$

ou plus simplement

$$V = \pi \times H \times (R^2 - R'^2) = 3,142 \times 24 \times [(5,75)^2 - 25],$$

ou

$$V = 607^{m.\,cub.},977.$$

La règle indiquée par cette dernière formule est de chercher la différence des carrés des rayons des surfaces cylindriques intérieures et extérieures, de multiplier cette différence par la hauteur et par le rapport $\pi = 3,142$.

288. DEUXIÈME QUESTION. — Chercher le volume d'un cône.

SOLUTION. — On multiplie la base B par la hauteur H; on prend le tiers du produit, et l'on a le volume demandé $V = \frac{1}{3} B \times H$. Si la base est un cercle qui ait R pour rayon, on aura encore pour l'expression du volume du cône $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \times H$.

289. APPLICATION. — Une tourelle en pierres qui couvre une écluse est terminée par un cône massif aussi en pierres. La base de ce cône a $1^m,20$ de diamètre et $1^m,50$ de hauteur; calculer le volume de la partie conique.

SOLUTION.

$$R = 0^m,6; \quad R^2 = 0,36; \quad H = 1,5;$$
$$V = \frac{1}{3}\pi \times R^2 \times H = \frac{1}{3} 3,142 \times 0,36 \times 1,5;$$

donc

$$V = 0^{m.\,cub.},565560.$$

290. TROISIÈME QUESTION. — Mesurer le volume d'un tronc de cône à bases parallèles.

SOLUTION. — On multiplie les deux bases B et B′ l'une par l'autre, on extrait la racine carrée du produit, ce qui donne $\sqrt{B \times B'}$; on ajoute à ce résultat

la somme B + B′ des deux bases ; on multiplie par la hauteur H ; on prend le tiers du produit, on a le volume demandé

$$V = \frac{1}{3}(B + B' + \sqrt{B \times B'}) \times H.$$

Lorsque les bases circulaires ont R et R′ pour rayons, on a $B = \pi R^2$, $B' = \pi R'^2$, $\sqrt{B \times B'} = \pi \times R \times R'$; on a, pour expression du volume,

$$V = \frac{1}{3}\pi H (R^2 + R'^2 + R \times R'),$$

c'est-à-dire qu'on multiplie les rayons des deux bases l'un par l'autre, ce qui donne $R \times R'$; on ajoute à ce produit la somme $R^2 + R'^2$ des carrés des deux rayons ; on multiplie la somme $R^2 + R'^2 + R \times R'$ par la hauteur H, puis le produit par π, et l'on prend le tiers du résultat pour avoir le volume demandé.

291. QUATRIÈME QUESTION. — Trouver le volume d'un tronc de cône à bases parallèles dans le cas particulier où le diamètre de la base inférieure est égal à la hauteur du tronc et moitié du diamètre de la base supérieure ; $AK = \frac{1}{2}AB = KF = CD$.

SOLUTION. — On multiplie le cube de la hauteur par $\frac{\pi}{6}$; on a le volume cherché $V = \frac{\pi}{6}H^3$ (*fig.* 163).

REMARQUE générale sur les questions traitées dans ce chapitre. — Les solutions données pour le calcul des volumes du cylindre, du cône et du tronc de cône sont encore applicables lorsque ces solides sont obliques, c'est-à-dire quand l'axe est incliné à la base.

CHAPITRE XXXI.

MESURE DES VOLUMES DE LA SPHÈRE ET DE SES PARTIES.

292. PREMIÈRE QUESTION. — Chercher le volume d'une sphère.

SOLUTION. — On multiplie la surface de la sphère, ou le quadruple d'un de ses grands cercles par le rayon, on prend le tiers de ce produit ; on a le volume de la sphère

$$V = \frac{S \times R}{3}; \quad V = \frac{4\pi R^2 \times R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Autrement on fait le cube du rayon, on multiplie le résultat par π, puis par 4, et l'on divise le produit par 3 ; ou encore on fait le cube du diamètre, on multiplie ce cube par π, et l'on divise ce produit par 6. $V = \frac{1}{6}\pi D^3$.

293. APPLICATION. — Calculer le volume d'une voûte hémisphérique dont l'épaisseur est de $0^m,38$, et qui a pour rayon de l'hémisphère intérieur $R = 2,7$ (*fig.* 164).

SOLUTION. — Ce volume cherché est celui de la différence de deux hémisphères dont les rayons sont

$$R = 2,70; \quad R' = 3,08.$$

En désignant ces volumes par V et V′, on aura

$$V' = \frac{2}{3}\pi R'^3 = \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times (3{,}08)^3 = \frac{44}{21} \times 29{,}218112$$
$$= 61^{\text{m. cub.}},219;$$

puis

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times (2{,}7)^3 = \frac{44}{21} \times 16{,}683$$
$$= 41^{\text{m. cub.}},240;$$

donc

$$V' - V = 61{,}219 - 41{,}240 = 19^{\text{m. cub.}},979.$$

294. DEUXIÈME QUESTION. — Chercher le volume d'un segment sphérique à une base, lorsque l'on connaît le rayon de la base et la hauteur du segment.

SOLUTION. — 1° On fait le carré r^2 du rayon de la base; on multiplie le produit par la hauteur H et par π, puis on divise le résultat par 2, ce qui donne $\frac{1}{2}\pi \times r^2 \times H$. 2° On forme le cube de la hauteur H^3, on le multiplie par π; on prend le $\frac{1}{6}$ du produit, ce qui donne $\frac{1}{6}\pi H^3$; on ajoute les deux volumes ainsi calculés, et l'on a le volume demandé

$$V = \frac{\pi \times r^2 \times H}{2} + \frac{1}{6}\pi H^3.$$

295. TROISIÈME QUESTION. — Chercher le volume d'un segment sphérique à une base, quand on connaît la hauteur du segment et le rayon de la sphère à laquelle il appartient.

SOLUTION. — On divise la hauteur H par 3; on retranche ce tiers du rayon, ce qui donne $R - \frac{1}{3}H$.

On multiplie ce reste par le carré de la hauteur et par le rapport π; on a le volume cherché

$$V = \pi \times H^2 \times (R - \tfrac{1}{3}H).$$

296. *Comparaison* du volume du segment à une base avec celui du cylindre.

Les formules qu'on vient de trouver renferment les résultats suivants :

1°. Le volume du segment sphérique à une base est égal à celui d'un cylindre droit dont la base aurait même rayon r que la base du segment, et dont la hauteur serait moitié de celle de ce segment, plus au volume d'une sphère qui aurait pour diamètre la hauteur du segment;

2°. Ce volume est encore égal à celui d'un cylindre qui aurait pour rayon de sa base la hauteur du segment, et pour hauteur le rayon de la sphère, moins le tiers de la hauteur du segment.

297. *Application* de l'expression du volume du segment à une base.

QUATRIÈME QUESTION. — Trouver le poids P d'une bombe de 27 centimètres de diamètre, de 4 centimètres d'épaisseur, renfoncée intérieurement d'un culot de 14 millimètres de flèche. Ce culot est un segment sphérique dont la hauteur est la flèche. On sait en outre que 1 décimètre cube de fer coulé pèse $7^{kil.},41$. On négligera l'ouverture où se place la mèche.

SOLUTION. — On calculera le volume V′ de la sphère, dont le diamètre serait celui de la bombe; savoir: 19 centimètres plus 2 fois 4 centimètres ou 27 centimètres. On en retranchera le volume V de la sphère intérieure qui forme l'espace vide, et la différence sera le volume du fer coulé, dont on exprimera le poids en décimètres cubes; de sorte qu'en multipliant ensuite le poids d'un décimètre cube de fer coulé par le nombre de décimètres cubes qu'on aura trouvé, on obtiendra le poids demandé. On prendra dans ces calculs le décimètre pour unité linéaire. On a pour données:

$$CD = D' = 1^{\text{décim.}},9; \qquad AB = D = 2^{\text{décim.}},7;$$
$$DE = H = 1^{\text{décim.}},9 - 0,14 = 1^{\text{décim.}},76.$$

Le calcul donne

$$V' = \tfrac{1}{6}\pi D'^3 = \tfrac{1}{6} \times \tfrac{22}{7} \times (2,7)^3 = \tfrac{11}{21} \times 19,683$$
$$= 10^{\text{décim. cub.}},310;$$
$$V = \pi H^2 \times (R - \tfrac{1}{3}H) = \tfrac{22}{7} \times (1,76)^2 \times \left(0,95 - \tfrac{1,76}{3}\right)$$
$$= \tfrac{22}{7} \times 3,0976 \times 0,3633 = 3^{\text{décim. cub.}},537.$$

Donc le volume V du segment est

$$V' - V = 10,310 - 3,537 = 6^{\text{décim. cub.}},773.$$

Le poids sera donc

$$P = 7^{\text{kil.}},41 \times 6,773 = 50^{\text{kil.}},18793 \ (\textit{fig.}\ 165).$$

298. CINQUIÈME QUESTION. — Chercher le volume d'un segment sphérique à deux bases.

SOLUTION. — 1° On fait la somme des deux bases, on la divise par 2, on multiplie le résultat par la hauteur, en sorte que si r, r' sont les rayons, et H la hauteur, on aura d'abord

$$\left(\frac{\pi r^2 + \pi r'^2}{2}\right) \times \mathrm{H}.$$

2°. On fait le cube de la hauteur, on le multiplie par le rapport π; on prend le $\frac{1}{6}$ de ce produit; on a encore

$$\tfrac{1}{6}\pi \times \mathrm{H}^3.$$

On ajoute ce second résultat au premier, et l'on a le volume demandé, ou

$$\mathrm{V} = \left(\frac{\pi r^2 + \pi r'^2}{2}\right) \times \mathrm{H} + \tfrac{1}{6}\pi \mathrm{H}^3.$$

Le résultat indiqué par cette formule peut s'énoncer ainsi : le volume du segment sphérique à deux bases est équivalent à la somme des volumes, 1° d'un cylindre qui aurait une base équivalente à la demi-somme des deux bases, et pour hauteur celle du segment; 2° d'une sphère qui aurait pour diamètre la hauteur du segment.

299. APPLICATION. — Calculer le volume d'un segment sphérique à deux bases.

Les rayons des bases étant $r = \mathrm{MA}$ (*fig.* 166) $= 25$ centimètres; $\mathrm{NB} = r' = 13$ centimètres; la hauteur $\mathrm{MN} = \mathrm{H} = 8$ centimètres.

SOLUTION. — La formule indiquée ci-dessus donne

$$V = (\tfrac{11}{7} \times 25^2 + \tfrac{11}{7} \times 13^2) \times 8 + \tfrac{11}{21} \times 8^3,$$

ou

$$V = \left(\frac{11 \times 625}{7} + \frac{11 \times 169}{7}\right) \times 8 + \frac{11 \times 512}{21}$$
$$= \frac{69872}{7} + \frac{5632}{21} = 1024^{\text{centim. cub.}},904.$$

300. SIXIÈME QUESTION. Calculer le volume d'un segment sphérique à deux bases, lorsque l'on connaît le rayon OF et les hauteurs MF, NF des deux segments à une base dont le segment à deux bases fait partie (*fig.* 166).

SOLUTION. — On calculera séparément les deux segments à une base ABFDBFC; on prendra la différence de ces segments, on aura le volume du segment à deux bases ABCD.

301. SEPTIÈME QUESTION. — Trouver le volume d'un secteur sphérique.

SOLUTION. — On multiplie la surface de la zone $z = 2\pi R \times H$ par le tiers du rayon; on a le volume demandé

$$V = z \times \frac{R}{3} = \frac{2\pi R^2 \times H}{3}.$$

On peut interpréter ainsi cette formule : le volume du secteur sphérique est les $\frac{2}{3}$ du cylindre qui aurait pour base un des grands cercles de la sphère,

et pour hauteur celle de la zone qui sert de base à ce secteur.

302. APPLICATION. — Calculer le volume du secteur sphérique dont la zone a pour hauteur $H = 2^{décim.},5$, et qui appartient à une sphère dont le rayon $R = 5$ décimètres.

SOLUTION. — La formule

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$$

donne

$$\frac{44}{21} \times 25 \times 2,5 = \frac{44 \times 625}{21} = 130^{décim.\ cub.},952.$$

303. HUITIÈME QUESTION. — Chercher le volume d'un onglet sphérique.

SOLUTION. — On multiplie le carré du diamètre de la sphère par l'arc du grand cercle perpendiculaire à l'intersection des deux demi-cercles qui forment l'onglet, et qui est compris entre les deux demi-circonférences; on prend le $\frac{1}{6}$ de ce produit; on a le volume demandé.

304. APPLICATION. — Calculer le volume de l'onglet BFC appartenant à une sphère dont le diamètre est de 2 mètres, l'arc de grand cercle BOC étant de 36 degrés.

SOLUTION. — On trouve que l'arc $BOC = A = 0,6284$; donc

$$V = \frac{4 \times 0,6284}{6} = 0^{m.\ cub.},418933 \ (\textit{fig.}\ 167).$$

CHAPITRE XXXII.

VOLUME D'UN TRONC D'ARBRE.

305. La forme exacte d'un tronc d'arbre est toujours celle d'un cône tronqué; mais, selon que les diamètres des deux bases diffèrent plus ou moins entre eux, ce solide diffère aussi plus ou moins de celui d'un cylindre droit. De là, deux méthodes différentes pour en calculer le volume. La résolution des questions suivantes fera connaître ces méthodes.

306. PREMIÈRE QUESTION. — Chercher le volume d'un tronc d'arbre, considéré comme un tronc de cône, dans les quatre cas suivants.

Premier cas. L'arbre étant en grume, c'est-à-dire avec l'écorce.

Données. Diamètre de la base inférieure $D=2R=0^m,9$; diamètre de la base supérieure $D'=2R'=0,80$; longueur du tronc $H=5,30$, d'où

$$R=0,45;\quad R'=0,40.$$

SOLUTION. — L'expression de ce volume est celle d'un tronc de cône donné par la formule

$$V=\tfrac{1}{3}\pi H(R^2+R'^2+R\times R'),$$

qui devient

$$V=\tfrac{1}{3}3,142\times 5,3\times(0,2025+0,16+0,18),$$

d'où

$$V = 3^{m.\ cub.},011345 \quad (\textit{fig.}\ 168).$$

Deuxième cas. En diminuant le diamètre de l'épaisseur de l'écorce et de l'aubier.

Données. On suppose que chaque diamètre de ce tronc doive être diminué de $0^{m},10$ pour l'écorce et l'aubier dans toute la longueur de l'arbre, de sorte qu'alors

$$R = 0^{m},40; \quad R' = 0,35 \quad \text{et} \quad H = 5,3.$$

SOLUTION. — En appliquant la formule citée dans la solution précédente, on trouve

$$V' = \frac{3,142}{3} \times 5,3 \times (0,4^{2} + 0,35^{2} + 0,4 \times 0,35)$$
$$= 5,550867 \times 0,4225 = 2^{m.\ cub.},3542975.$$

Troisième cas. En ne prenant que la pièce équarrie en dedans de l'aubier.

DONNÉES. — Le volume cherché est celui d'un tronc de pyramide régulière; les bases de ce tronc sont des carrés inscrits aux cercles des bases du tronc; on sait, d'ailleurs, que le carré inscrit à un cercle est la moitié du carré circonscrit au cercle: les diamètres sont

$$D = 0,8; \quad D' = 0,7.$$

SOLUTION. — On a pour calculer le volume de ce tronc de pyramide, la formule

$$V' = \tfrac{1}{3}\left(B + B' + \sqrt{B \times B'}\right) \times H,$$

qui devient

$$\frac{1}{6}(D^2+D'^2+DD')\times H$$
$$=\frac{1}{6}(0{,}64+0{,}49+\sqrt{0{,}64\times 0{,}49})\times 5{,}3$$
$$=\frac{1{,}69}{6}\times 5{,}3=1^{\text{m. cube}},493 \text{ (}\textit{fig.}\text{ 169).}$$

Quatrième cas. En ne prenant que la pièce équarrie ayant même surface aux deux bouts.

Données. Le parallélipipède rectangle qu'il faut évaluer dans ce cas, a pour base le carré inscrit au plus petit des deux cercles; on a $B=\frac{0{,}49}{2}=0^{\text{m. car}},245$; on a toujours $H=5{,}3$.

SOLUTION. — La formule $V=B\times H$ devient

$$V=0{,}245\times 5{,}3=1^{\text{m. cube}},2985 \quad (\textit{fig.}\ 170).$$

307. DEUXIÈME QUESTION. — Chercher le volume d'un tronc d'arbre considéré comme un cylindre dans les cas suivants.

Premier cas. L'arbre étant en grume.

Données. Soit la circonférence mesurée vers le milieu du tronc $C=2^{\text{m}},671$ et sa hauteur $H=5^{\text{m}},30$ (*fig.* 168).

SOLUTION. — On regardera ce solide comme ayant approximativement le même volume qu'un cylindre droit dont la base aurait pour contour la circonférence moyenne donnée et pour hauteur celle du tronc; on aurait donc $V=B\times H$. Pour avoir la base B, on la calculera soit immédiatement, soit après avoir cherché le rayon.

1°. Pour calculer la base immédiatement, on fera usage de la formule $S = \frac{C^2}{4\pi}$, d'où

$$S = \frac{2{,}671^2}{4\times 3{,}142} = \frac{7{,}134241}{12{,}568} = \frac{7134{,}241}{12568} = 0^{m.\,car.},5676;$$

de là

$$V = 0{,}5676\times 5{,}3 = 3^{m.\,cub.},0085.$$

2°. Si l'on veut d'abord connaître le rayon du cercle moyen, on divisera la circonférence par 2π; on aura donc

$$R = \frac{C}{2\pi} = \frac{2{,}671}{6{,}284} = \frac{2671}{6284} = 0{,}425045;$$

de là

$$S = \pi R^2 = 3{,}142\times 0{,}425045^2;$$

puis, en multipliant ce produit par 5,3, on aura

$$V = 3^{m.\,cub.},0085.$$

Deuxième cas. En diminuant le diamètre de l'arbre de l'épaisseur de l'écorce et de l'aubier.

Données. Le rayon, sans y comprendre l'aubier dont nous supposerons toujours l'épaisseur jointe à celle de l'écorce de $0^m,05$, sera

$$0^m,425 - 0{,}05 = 0{,}375 = R',$$

d'où

$$2R' = 0{,}75.$$

SOLUTION. — Le second cylindre aura encore pour

expression de son volume

$$V' = B \times H \text{ ou } V' = \pi R'^2 \times H = 3,142 \times 0,375^2 \times 5,3$$
$$= 3,142 \times 0,141 \times 5,3 = 2^{m.\,cub.},348.$$

TROISIÈME CAS. — En ne prenant que la pièce équarrie avec des surfaces inégales à ses deux bouts.

Données. Le carré inscrit au cercle moyen $= \frac{D'^2}{2}$; c'est la base du parallélipipède équivalent au volume cherché, la longueur du tronc étant encore $5^m,3$.

SOLUTION. — Le volume cherché est

$$V = \frac{0,75^2}{2} \times 5,3 = \frac{0,5625 \times 5,3}{2} = 1,4906.$$

Quatrième cas. En prenant la pièce équarrie sous la forme d'un parallélipipède rectangle dont la base est le carré inscrit au plus petit cercle des deux bases. La solution est la même que celle du 4e cas de la première question.

PREMIÈRE REMARQUE. — Sur la différence des résultats trouvés dans les solutions des deux questions précédentes.

Tous les résultats obtenus en n'employant que les volumes du cylindre et du parallélipipède sont plus forts que ceux qu'on obtient en considérant le tronc de cône et le tronc de pyramide. Cette différence est d'autant plus sensible que les diamètres des bases diffèrent plus entre eux. Dans la pratique on emploie cette méthode de calculer les volumes des troncs d'arbre, par les volumes des cylindres et du

parallélipipède rectangle, ce qui ne peut offrir une approximation vraiment suffisante, qu'autant que les diamètres des cercles des deux bases diffèrent peu entre eux.

DEUXIÈME REMARQUE. — Sur un autre moyen de calculer la diminution à faire pour l'aubier.

Au lieu de diminuer le diamètre de l'arbre, on ôte quelquefois une certaine fraction de tout le volume, fraction qui varie selon l'espèce d'arbre; voici un exemple pour l'application de cette méthode.

308. TROISIÈME QUESTION. — Trouver par approximation le volume d'un tronc d'arbre, connaissant la circonférence moyenne et la longueur de ce tronc.

Données. — Soit la circonférence mesurée vers le milieu du tronc $C = 1^{m},30$ et la longueur $H = 6,25$; on supposera ensuite que l'on doit diminuer le volume de cet arbre du $\frac{1}{6}$ pour l'écorce et l'aubier.

Le volume de l'arbre avec l'écorce et l'aubier sera

$$V = B \times H; \quad B = \frac{C^2}{4\pi} = \frac{1,3^2}{4 \times 3,142} = \frac{1690}{12568},$$

d'où

$$V = \frac{1690}{12568} \times 6,25 = 0,8404,$$

dont le $\frac{1}{6} = 0,1400$, et le volume demandé est

$$0,8404 - 0,1400 = 0^{m.\ cub.},7004.$$

CHAPITRE XXXIII.

VOLUME D'UNE BORNE.

309. QUESTION. — Calculer le prix d'une borne en pierre.

Données pour le volume. — On suppose que cette borne a, à sa base, la forme d'un parallélipipède rectangle, et que la partie supérieure qui doit être hors de terre est celle d'un tronc de cône surmonté d'un segment sphérique à une base.

Données pour le prix. — On paye le tailleur de pierre pour les quatre faces latérales du solide ABCDEFGH, à raison de 3 fr. le mètre carré; ces faces n'étant qu'à demi polies, la surface ABCD ne se compte pas, et les surfaces du tronc de cône et du segment se payent à raison de 6 fr. le mètre carré. On ne paye pour le volume de la pierre que ce que contient effectivement la borne taillée, et cela à raison de 24 fr. le mètre cube.

La base ABCD est un carré AB = AD = IK = 0,65; circonf. LM = 1,76; LI = 0,92; TO = 0,919 = H; ZO = H' = 0,12; AE = 0,80, d'où $TI = \frac{KI}{2} = 0{,}325$.

SOLUTION. — 1° On calculera d'abord la surface latérale du parallélipipède ABCDEFGH composé

de quatre rectangles égaux, et celle du dessus de la base qui est la différence du carré circonscrit EFGH au cercle inscrit IUKV; on fera la somme des mètres carrés que contiennent ces deux parties, puis on multipliera 3 fr., prix d'un mètre carré, par le nombre de mètres carrés trouvés; on aura un premier prix p.

2°. On calculera la surface du tronc de cône IKLM dont on connaît le côté LI, la circonférence LM, et dont on peut connaître la circonférence IK, puisque le diamètre IK est donné; puis on calculera la surface de la zone LZM dont on connaît la hauteur ZO $= H'$, et le rayon LO de la base; on a $r = \frac{LM}{2}$, et, par conséquent, la somme des carrés égale $r^2 + H'^2$. On multipliera 6 fr., prix d'un mètre carré, par le nombre qu'en contient cette surface courbe totale du tronc de cône et de la zone; on aura le second prix p'.

3°. On calculera le volume du parallélipipède rectangle ABCDEFGH, celui du tronc de cône IKLM, celui du segment LZM; on fera la somme de ces volumes, et l'on multipliera 24 fr., prix d'un mètre cube de pierre, par le nombre de mètres cubes trouvé; on aura le prix p''.

La somme des trois prix partiels $p + p' + p''$ donnera le prix cherché.

Détails des calculs. — 1°. La surface latérale du parallélipipède est égale au produit de son péri-

mètre par la hauteur AE. Or, le périmètre AB + BC + CD + DA = $0{,}65 \times 4 = 2{,}60$; donc la surface $S = 2{,}6 \times 0{,}8 = 2^{m.\ car.},08$.

Le carré EFGH = $\overline{AB}^2 = 0{,}65^2 = 0^{m.\ car.},4225$. Celle du cercle IUKV = $\pi \times \overline{TI}^2 = 3{,}142 \times 0{,}325^2 = 0^{m\ car.},3319$; donc

$$S' = \overline{AB}^2 - \pi\overline{TI}^2 = 0{,}4225 - 0{,}3319 = 0^{m.\ car.},0906.$$

Ces deux surfaces réunies donneront donc

$$S + S' = 2{,}08 + 0{,}0906 = 2^{m.\ car.},1706,$$

et pour le prix de cette première partie

$$p = 3^f \times 2{,}1706 = 6^f{,}51.$$

2°. *Surface polie.* — 1° Surface du tronc de cône; l'expression de cette surface est

$$S = \left(\frac{\text{circ. IK} + \text{circ. LM}}{2}\right) \times \text{LI};$$

or circ. IK = πIK = $3{,}142 \times 0{,}65 = 2{,}0423$,

et circ. LM = 1,76 (donnée); donc la demi-somme est

$$\frac{2{,}0423 + 1{,}76}{2} = \frac{3{,}8023}{2} = 1{,}90115;$$

donc surface $S' = 1{,}90115 \times 0{,}92 = 1^{m.\ car.},7491$.

2°. La surface z de la zone est donnée par la formule

$$z = \pi \times (r^2 + H^2) = \pi(\overline{LO}^2 + \overline{OZ}^2),$$

ce qui exige que l'on cherche le rayon LO; il est égal à

$$\frac{\text{circ. LM}}{2\pi} = \frac{1,76}{6,284} = \frac{1760}{6284} = r = LO = 0,28,$$

donc

$$\text{surface } z = 3,142 \times 0,28^2 + 0,12^2$$
$$= 3,142 \times (0,0784 + 0,0144) = 0^{m.\,car.},2916.$$

La surface polie se compose donc de

$$1,7491 + 0,2916;$$

donc

$$S' = 2^{m\ car.},0407,$$

et pour le prix de cette seconde surface,

$$p' = 6^f \times 2,047 = 12^f,24.$$

Volume de la borne. — 1°. Volume du parallélipipède. Ce volume est donné par la formule

$$V = B \times H$$

ou

$$V = \overline{AB}^2 \times AE = 0,4225 \times 0,8 = 0^{m.\,cub.},338.$$

2°. Volume du tronc de cône; on a

$$V' = \tfrac{1}{3}\pi \times TO\,(\overline{TI}^2 + \overline{LO}^2 + TI \times LO) = \frac{3,142}{3}$$
$$\times 0,919 \times (0,325^2 + 0,28^2 + 0,325 \times 0,28)$$
$$= 0,9624 \times 0,2624 = 0^{m.\,cub.},252534.$$

3°. Volume du segment sphérique:

$$V'' = \frac{\pi \times r^2 \times H}{2} + \frac{1}{6}\pi H^3 = \frac{3,142 \times 0,0784 \times 0,12}{2}$$
$$+ \frac{1}{6}\,3,142 \times 0,001728 = 0,01478 \times 0,000905,$$

donc

$$V'' = 0^{m.\,cub.},015685;$$

la somme de ces trois volumes est donc

$$v + v' + v'' = V = 0,338 + 0,252534 + 0,015685$$
$$= 0^{m.\,cub.},606216,$$

et pour le prix du volume

$$p'' = 24^f \times 0,606216 = 14^f,55.$$

Enfin l'on obtiendra pour le prix total de la borne:

$$P = p + p' + p'' = 6^f,51 + 12^f,24 + 14^f,55 = 33^f,30.$$

310. DEUXIÈME QUESTION. — Chercher le nombre de litres contenus dans un tonneau.

SOLUTION. — On fera passer un plan perpendiculaire à l'axe suivant AB (*fig.* 172), qui partagera le tonneau en deux parties égales. On pourra regarder chacun de ces solides comme ayant approximativement le même volume qu'un cône tronqué. On suppose le diamètre D = 0,60 pour la circonférence de la base inférieure, et pour la circonférence de la seconde base on aura

$$D' = 0,54;$$

la hauteur du tonneau étant égale à $0^m,80$, la hauteur de l'un des troncs du cône sera $\frac{0^m,80}{2}$; on aura donc

$$2R = D = 0,60 \quad \text{et} \quad 2R' = D' = 0,54;$$

d'où

$$R = 0,30, \quad \text{et} \quad R' = 0,27.$$

Nous avons vu que le volume d'un tronc de cône était donné par la formule

$$V = \tfrac{1}{3}\pi H(R^2 + R'^2 + R \times R');$$

cette formule devient

$$V = \tfrac{1}{3}3,142 \times \frac{0,80}{2}(0,09 + 0,0724 + 0,08)$$
$$= \tfrac{1}{3}3,142 \times 0,4 \times 0,2424 = 0^{m.cub.},1015.$$

Le tonneau a été divisé par le plan AB en deux parties égales; il contiendra donc

$$0^{m.cub.},1015 \times 2 = 0^{m.cub.},203;$$

c'est-à-dire 203 millièmes de mètre cube; mais on sait qu'un millième de mètre cube a la même contenance qu'un décimètre cube ou qu'un litre; donc le tonneau ABCD (*fig.* 172) contiendra 203 litres.

311. TROISIÈME QUESTION. *Faire un projet de route.* — Un tel projet se compose, 1° du plan des lieux; 2° tracé de la route sur les lieux et sur le plan; 3° nivellement; 4° tracé de l'axe du projet sur

le nivellement rapporté; 5° construction de profils en travers; 6° calculs des cubes des déblais et des remblais.

1°. *Du plan des lieux.* — On fera ce plan à la planchette, au graphomètre et à l'équerre d'arpenteur, en se conformant à ce qui a été dit précédemment sur le lever des plans.

2°. *Tracé de la route sur les lieux et sur le plan.* — Le plan des lieux étant fait et rapporté sur le papier, on tracera avec des jalons, sur le terrain, la direction de la route, de manière que les courbes soient agréables à l'œil, sans jarrets, et que les pentes soient ménagées et bien raccordées; on plantera des piquets à tous les sommets des angles A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, puis on relèvera ces angles sur le plan, et l'on aura ainsi l'axe ABCDEFGIK de la direction projetée (*fig.* 173).

3°. *Nivellement.* — On fera le nivellement de la ligne ABCDEFGIK; on le rapportera, comme on le voit (*fig.* 174), en prenant un plan de comparaison passant à 25 mètres, par exemple, au-dessus du premier point *a*; la ligne *abcdefghik* sera la ligne de terre.

4°. *Tracé de l'axe du projet sur le nivellement.* — On tracera sur le nivellement l'axe de la route à construire, de manière que le mouvement des terres ne soit pas trop considérable, que le cube des déblais soit à peu près égal à celui des remblais, que le transport des déblais qui doivent servir à faire

les remblais ne soit pas trop long, que les pentes ne soient pas trop rapides, et enfin que leur nombre ne soit pas trop considérable. Si par une première étude on n'obtient pas tous ces résultats, il faudra recommencer le travail, faire de nouveaux tâtonnements, et s'arrêter enfin à celui des projets qui présentera le plus d'avantages.

Supposons donc qu'on veuille faire passer l'axe de la route projetée par les points *a*, *f* et *k* du terrain; les deux points *a* et *f* étant tous deux à 25 mètres au-dessous du plan de comparaison, si l'on joint ces deux points, la ligne *af* sera une horizontale; le point *b* étant aussi à 25 mètres au-dessous du plan de comparaison, aussi bien que l'axe, l'axe passera au point *b* de la ligne de terre; le point *c* du terrain étant à 24 mètres au-dessous du plan de comparaison, passera à 1 mètre au-dessus de l'axe; il y aura à ce point un déblai à l'axe égal à 1 mètre, cote que l'on trouvera en retranchant la cote 24 du terrain de la cote 25 du projet; le point *d* du terrain est à 23^{m},50 au-dessous du plan de comparaison; il passe donc à 1^{m},50 au-dessus de l'axe, comme on le voit, en retranchant 23,50 de 25; il y aura au point *d* un déblai de 1^{m},50 : le point *c* du terrain est à 28 mètres au-dessous du plan de comparaison, l'axe du projet n'est à ce point qu'à 25 mètres au-dessous du même plan de comparaison, il y aura donc au point *c* un remblai de 3 mètres.

On joindra ensuite le point *f* au point *k*; le point *f*

est à 25 mètres au-dessous du plan de comparaison, tandis que le point *k* est à 29 mètres au-dessous du même plan; donc la différence de niveau entre ces deux points est de 4 mètres; mais la distance horizontale qui sépare ces deux points égale 214 mètres. On connaîtra donc la différence de niveau entre deux points distants de 1 mètre, en divisant 4 mètres par 214, et l'on trouvera que la différence de niveau est de $0^{m},01869$ pour 1 mètre. Le point *g* est à une distance horizontale du point *f* égale à 52 mètres; la différence de niveau pour l'axe, entre ces deux points, sera donc

$$0,01869 \times 52 = 0,97188.$$

En ajoutant cette différence à 25, cote de nivellement de l'axe au point *f*, on aura 25,97 pour cote de nivellement de l'axe au point *g*; et en retranchant de ce nombre la cote de nivellement de la ligne de terre qui égale $25^{m},50$, on trouvera au point *g* un déblai à l'axe de $0^{m},47$. Le point *h* est à une distance horizontale du point *g* égale à 50 mètres; la différence de niveau pour l'axe, entre ces deux points, sera donc

$$0,01869 \times 50 = 0,9345.$$

En ajoutant cette différence à $25^{m},97$, cote de nivellement de l'axe au point *g*, on aura 26,90 pour cote de nivellement de l'axe au point *h*; et puisque ce nombre est plus petit que 27, cote de nivelle-

ment de la ligne de terre, en le retranchant de 27, on trouvera qu'en ce point il y aura un remblai égal à 0,10.

De même, le point *i* est à une distance horizontale du point *h* égale à 62 mètres; la différence de niveau pour l'axe, entre ces deux points, sera donc

$$0{,}01869 \times 62 = 1{,}15878;$$

en ajoutant cette différence à 26,90, cote de nivellement de l'axe au point *h*, on aura 28,06 pour cote de nivellement de l'axe au point *i*; et puisque ce nombre est plus petit que 28,50, cote de nivellement de la ligne de terre, en le retranchant de 28,50, on trouvera qu'au point *i* l'axe sera en remblai de $0^{m},44$.

Enfin le point *k* est à une distance horizontale du point *i* égale à 50; la différence de niveau pour l'axe, entre ces deux points, sera donc

$$0{,}01869 \times 50 = 0{,}9345;$$

en ajoutant cette différence à 28,06, cote de l'axe au point *i*, on aura 29 pour cote de l'axe au point *k*; mais puisque 29 est aussi la cote de nivellement de la ligne de terre, l'axe passera donc par le point *k*, ce qui vérifie les calculs qui règlent la pente du point *f* au point *k*.

5°. *Construction de profils en travers et calcul des cotes de ces mêmes profils.* — On fera des profils en travers, suivant des lignes perpendiculaires à l'axe, à

tous les sommets des angles A, B, C, D, E, F, G, H, I, K. Cependant si, dans l'intervalle de deux de ces points, il se trouvait quelque sinuosité qui pût faire augmenter ou diminuer le cube des déblais ou des remblais, tels qu'un trou, un monticule, un chemin creux, un terrier, ou toute autre, il faudrait augmenter le nombre des profils en travers, et en faire assez pour avoir toutes les sinuosités apparentes du terrain. On rapportera ces profils en travers au-dessous du nivellement en long, de manière que chaque profil en travers corresponde au point où il a été pris sur le nivellement en long; on dessinera ensuite la forme de la route à construire sur ces profils en travers, en observant que l'axe devra être porté en déblai ou en remblai avec des cotes égales à celles qui sont marquées sur le nivellement en long, comme on le voit *fig.* 174.

Ces profils en travers serviront à faire le calcul des déblais et des remblais; à cet effet, il faudra pour chaque profil calculer les cotes des différentes hauteurs; ces cotes détermineront les dimensions des solides à évaluer. Voici comment on calculera les cotes du profil a' : la cote de l'axe au point a' est celle du nivellement en long au point a; elle égale o; le nivellement en travers, fait suivant la ligne aR, nous apprend que la pente du terrain est de $1^m,40$ pour une longueur de 7 mètres; elle sera, par conséquent, de $0^m,20$ pour 1 mètre, et pour 4 mètres elle sera égale à $0^m,80$; donc la cote

$bg = 0{,}20 \times 4 = 0{,}80$. Ajoutons à cette cote la profondeur du fossé, et la pente par mètre du terrain pour une longueur de $0^m{,}66$, et nous aurons

$$fc = 0{,}80 + 0{,}36 + 0{,}14 = 1^m{,}30;$$

de même, à cette dernière cote, ajoutons la pente, par mètre, du terrain pour une longueur de $0^m{,}66$, et nous aurons

$$de = 1^m{,}30 + 0{,}14 = 1^m{,}44.$$

Comme le talus est à 45 degrés, on trouvera la hauteur du triangle $pde = 1{,}60$. On trouvera de même que la cote $hs = 0{,}175 \times 4 = 0{,}70$, et que la hauteur du triangle $hqs = 1{,}60$.

On calculera de la même manière les cotes de tous les autres profils.

6°. *Calculer les cubes des déblais et des remblais.* — On fera les cubes des déblais et des remblais en les décomposant en solides, en pyramides ou bien en prismes tronqués de la manière suivante :

Cubes des déblais entre les profils 1 et 2.

	m. cub.	DÉBLAIS.	REMBLAIS.
Vol. $pdep'd'e'$ ... $= \frac{1}{6}50\ [1{,}44 \times 1{,}6 + 1{,}8 \times 2 + \sqrt{(1{,}44 \times 1{,}6)\ (1{,}8 \times 2)}] = \frac{1}{6}\ 50 \times 8{,}784 =$	73,200		
Vol. $dcfed'c'f'e'$. $= \frac{1}{6}50 \times 0{,}66\ [1{,}44 + 1{,}3 + 1{,}6 + 1{,}8 + \sqrt{(1{,}44 + 1{,}3)(1{,}6 + 1{,}8)}] = \frac{1}{6}50 \times 0{,}66 \times 9{,}145 =$	50,300		
Vol. $cbgfc'b'f'g'$. $= \frac{1}{6}50 \times 0{,}66\ [1{,}3 + 0{,}8 + 1{,}6 + 1 + \sqrt{(1{,}3 + 0{,}8)\ (1{,}6 + 1)}] = \frac{1}{6}\ 50 \times 0{,}66 \times 7{,}04 =$	38,720		
Vol. $a'bgb'b'g'$ ... $= \frac{1}{6}50\ [0{,}8 \times 4 + 1 \times 4 + \sqrt{(0{,}8 \times 4)\ (1 \times 4)}] = \frac{1}{6}\ 50 \times 10{,}77 =$	89,750		
	251,970	251,970	

Cubes des remblais entre les profils 1 et 2.

Vol. $a'hsb'h's'$ ... $= \frac{1}{6}50\ [0{,}7 \times 4 + 0{,}7 \times 4 + \sqrt{(0{,}7 \times 4)\ (0{,}7 \times 4)}] = \frac{1}{6}\ 50 \times 8{,}4 \ldots\ldots\ldots =$	70,000		
Vol. $hqsh'q's'$ .... $= \frac{1}{6}50\ [0{,}7 \times 1{,}6 + 0{,}7 \times 1{,}7 + \sqrt{(0{,}7 \times 1{,}6)\ (0{,}7 \times 1{,}7)}] = \frac{1}{6}\ 50 \times 3{,}46 =$	28,833		
	98,833		98,833

Cubes des déblais entre les profils 2 et 3.

Vol. $p'd'e'pqr$ ... $= \frac{1}{6}46\ [1{,}8 \times 2 + 2{,}4 \times 2{,}4 + \sqrt{(1{,}8 \times 2)\ (2{,}4 \times 2{,}4)}] = \frac{1}{6}\ 46 \times 13{,}91 =$	106,643		
Vol. $d'c'f'e'pnsr$. $= \frac{1}{6}46\ [1{,}8 + 1{,}6 + 2{,}4 + 2{,}3 + \sqrt{(1{,}8 + 1{,}6)(2{,}4 + 2{,}3)}] \times 0{,}66 = \frac{1}{6}46 \times 0{,}66 \times 12{,}1 =$	61,226		
Vol. $b'c'g'f'nmts$. $= \frac{1}{6}46 \times 0{,}66\ [1{,}6 + 1 + 1{,}6 + 2{,}3\sqrt{(1{,}6 + 1)\ (1{,}6 + 2{,}3)}] = \frac{1}{6}\ 46 \times 0{,}66 \times 9{,}68 =$	48,980		
Vol. $b'b'g'mc'ut$.. $= \frac{1}{6}46\ [1 + 1{,}6 + 1 + \sqrt{1\ (1{,}6 + 1)}] = \frac{1}{6}\ 46 \times 4{,}86 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$	37,260		
Vol. $b'c'vu$ ..... $= \frac{1}{6}46 \times 1 \times 2{,}66 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$	20,390		
	274,499	274,499	
A reporter.....		526,469	98,833

		DÉBLAIS.	REMBLAIS.
Cubes des remblais entre les profils 2 *et* 3.			
Report.....		526,469	98,833
	m. cub.		
Vol. $b'h'q'vxo\ldots = \frac{1}{6}46\,[4\times 1+1{,}34\times 1{,}4+\sqrt{(4\times 1)\,(1{,}34\times 1{,}4)}] = \frac{1}{6}\,46\times 8{,}62$ ..... =	66,086		66,086
Cubes des déblais entre les profils 3 *et* 4.			
Vol. $pqrp'q'r'\ldots = \frac{1}{6}48\,[2{,}4\times 2{,}4+2{,}7\times 2{,}4+\sqrt{(2{,}4\times 2{,}4)\,(2{,}7\times 2{,}4)}] = \frac{1}{6}\,48\times 18{,}34 =$	146,720		
Vol. $pnsrp'n's'r'\ldots = \frac{1}{6}48\times 0{,}66\,[2{,}3+2{,}4+2{,}6+2{,}7+\sqrt{(2{,}3+2{,}4)\,(2{,}6+2{,}7)}] = \frac{1}{6}\,48\times 0{,}66\times 15 =$	79,200		
Vol. $nmtsn'm't's'\ldots = \frac{1}{6}48\times 0{,}66\,[2{,}3+1{,}6+2{,}6+2+\sqrt{(2{,}3+1{,}6)\,(2{,}6+2)}] = \frac{1}{6}\,48\times 0{,}66\times 12{,}73 =$	67,200		
Vol. $mc'utm'd'u't'\ldots = \frac{1}{6}48\times 4\,[1{,}6+1+2+1{,}5+\sqrt{(1{,}6+1)\,(2+1{,}5)}] = \frac{1}{6}\,48\times 4\times 9{,}11 =$	291,520		
Vol. $c'vud'v'u'\ldots = \frac{1}{6}48\,[2{,}66\times 1+3{,}33\times 1{,}5+\sqrt{(2{,}66\times 1)\,(3{,}33\times 1{,}5)}] = \frac{1}{6}\,48\times 11{,}3 =$	90,400		
	675,040	675,040	
Cubes des remblais entre les profils 3 *et* 4.			
Vol. $vxov'x'o'\ldots = \frac{1}{6}48\,[3{,}74\times 0{,}5+2{,}47\times 0{,}3\times\sqrt{(3{,}74\times 0{,}5)\,(2{,}47\times 0{,}3)}] = \frac{1}{6}\,48\times 3{,}78 =$	30,240		30,240
Cubes des déblais entre les profils 4 *et* 5.			
Vol. $q'p'r'p''\ldots = \frac{1}{6}24\,(2{,}7\times 2{,}4) = \frac{1}{6}\,24\times 6{,}48$ ..... =	25,920		
Vol. $p'n's'r'p''n''\ldots = \frac{1}{6}24\times 0{,}66\,(2{,}6+2{,}7) = \frac{1}{6}\,24\times 0{,}66\times 5{,}3$ ..... =	14,000		
Vol. $n'm't's'm''n'' = \frac{1}{6}20\times 0{,}66\,(2{,}6+2) = \frac{1}{6}\,20\times 0{,}66\times 4{,}6$ ..... =	10,120		
Vol. $m'd'u't'd''m'' = \frac{1}{6}15\times 4\,(2+1{,}5) = \frac{1}{6}\,15\times 4\times 3{,}5$ ..... =	35,000		
Vol. $d'v'u'd''\ldots = \frac{1}{6}10\times 3{,}33\times 1{,}5 = \frac{1}{6}\,10\times 5$ ..... =	8,330		
	93,370	93,370	
A reporter.....		1294,879	195,159

		DÉBLAIS.	REMBLAIS.
Cubes des remblais entre les profils 4 et 5.			
Report.....		1294,879	195,159
	m. cub.		
Vol. $dcam''$ ..... $= \frac{1}{6}40 \times 1,7 \times 1,6 = \frac{1}{6}40 \times 2,72$	= 18,130		
Vol. $ae'bcm''d''$ .. $= \frac{1}{6}50 \times 4\ (3 + 1,7) = \frac{1}{6}50 \times 4 \times 5,11$	= 170,000		
Vol. $ebafd''v'$ . .. $= \frac{1}{6}60 \times 4\ (3 + 3,1) = \frac{1}{6}60 \times 4 \times 6,1$	= 244,000		
Vol. $agfv'x'o'$ .... $= \frac{1}{6}60\ [5,1 \times 3,1 + 2,47 \times 0,3 + \sqrt{(5,1 \times 3,1)\ (2,47 \times 0,3)}] = \frac{1}{6}60 \times 18,97$	= 189,700		
	621,830		621,830
Cubes des remblais entre les profils 5 et 6.			
Vol. $dcac'$ ..... $= \frac{1}{6}46 \times 1,7 \times 1,6 = \frac{1}{6}46 \times 2,72$	= 20,853		
Vol. $acbef'c'$ .... $= \frac{1}{6}46 \times 4\ (1,7 + 3) = \frac{1}{6}46 \times 4 \times 4,7$	= 144,133		
Vol. $e'baf a'f'$ . .. $= \frac{1}{6}46 \times 4\ [3 + 3,1 + 0,5 + \sqrt{(3 + 3,1)\ (0,5)}] = \frac{1}{6}46 \times 4 \times 9,65$	= 295,933		
Vol. $faga'mr$ .... $= \frac{1}{6}46\ [3,1 \times 5,1 + 1,2 \times 0,5 + \sqrt{(3,1 \times 5,1)\ (1,2 \times 0,5)}] = \frac{1}{6}46 \times 19,48$	= 149,343		
	610,262		610,262
Cubes des déblais entre les profils 5 et 6.			
Vol. $k'i'hi$..... $= \frac{1}{6}12 \times 1,3 \times 1,2 = \frac{1}{6}12 \times 1,56$	= 3,120		
Vol. $hi'd'oir$..... $= \frac{1}{6}12 \times 0,66\ (1,3 + 1,1) = \frac{1}{6}12 \times 0,66 \times 2,4$	= 3,168		
Vol. $od'c'fkr$..... $= \frac{1}{6}12 \times 0,66\ (1,1 + 0,5) = \frac{1}{6}12 \times 0,66 \times 1,6$	= 2,112		
Vol. $klf'c'$ ..... $= \frac{1}{6}12 \times 4 \times 0,5$	= 4,000		
	12,400	12,400	
A reporter.....		1307,279	1427,251

Cubes des déblais entre les profils 6 et 7.

		DÉBLAIS.	REMBLAIS.
Report.....		1307,279	1427,251
Vol. *k'hidec*.....	$=\frac{1}{6}52\,[1{,}3\times1{,}2+1{,}8\times1{,}6+\sqrt{(1{,}3\times1{,}2)\,(1{,}8\times1{,}6)}]=\frac{1}{6}\,52\times6{,}55=$	m. cub. 56,766	
Vol. *horiefbc*....	$=\frac{1}{6}52\times0{,}66\,[1{,}3+1{,}1+1{,}8+1{,}7+\sqrt{(1{,}3+1{,}1)\,(1{,}8+1{,}7)}]=\frac{1}{6}\,52\times0{,}66\times8{,}79=$	50,266	
Vol. *olkrfgab*....	$=\frac{1}{6}52\times0{,}66\,[1{,}1+0{,}5+1{,}7+1+\sqrt{(1{,}1+0{,}5)\,(1{,}7+1)}]=\frac{1}{6}\,52\times0{,}66\times6{,}37=$	36,400	
Vol. *lf'kggqa*....	$=\frac{1}{6}52\times4\,[0{,}5+1+0{,}47+\sqrt{0{,}5\times1{,}47}]=\frac{1}{6}\,52\times4\times2{,}7=$	93,600	
Vol. *f'gqp*.....	$=\frac{1}{6}52\times0{,}47\times1{,}98=$	8,060	
		245,092	245,092

Cubes des remblais entre les profils 6 et 7.

Vol. *f'a'mpon*...	$=\frac{1}{6}52\,[5{,}2\times0{,}5+4{,}22\times0{,}5+\sqrt{(5{,}2\times0{,}5)\,(4{,}22\times0{,}5)}]=\frac{1}{6}\,52\times7{,}05=$	61,100	61,100

Cubes des déblais entre les profils 7 et 8.

Vol. *dechil*.....	$=\frac{1}{6}50\,[1{,}8\times1{,}6+1{,}5\times1{,}5+\sqrt{(1{,}8\times1{,}6)\,(1{,}5\times1{,}5)}]=\frac{1}{6}\,50\times7{,}67=$	63,916	
Vol. *ef bcinml*...	$=\frac{1}{6}50\times0{,}66\,[1{,}7+1{,}8+1{,}4+1{,}5+\sqrt{(1{,}7+1{,}8)\,(1{,}4+1{,}5)}]=\frac{1}{6}50\times0{,}66\times9{,}58=$	52,666	
Vol. *fgabnkom*...	$=\frac{1}{6}50\times0{,}66\,[1{,}7+1+1{,}4+0{,}6+\sqrt{(1{,}7+1)\,(1{,}4+0{,}6)}]=\frac{1}{6}50\times0{,}66\times7{,}02=$	38,583	
Vol. *gpakpo*.....	$=\frac{1}{6}50\,[5{,}98\times1+2{,}8\times0{,}6+\sqrt{(5{,}98\times1)\,(2{,}8\times0{,}6)}]=\frac{1}{6}\,50\times10{,}83=$	90,250	
		245,415	245,415

Cubes des remblais entre les profils 7 et 8.

Vol. *ponpqs*.....	$=\frac{1}{6}50\,[4{,}22\times0{,}5+7{,}4\times1+\sqrt{(4{,}22\times0{,}5)\,(7{,}4\times1)}]=\frac{1}{6}\,50\times13{,}46=$	112,166	112,166
A reporter.....		1797,786	1600,517

		DÉBLAIS.	REMBLAIS.
Report.....		1797,786	1600,517
	m. cub.		
Vol.*hildec*..... $=\frac{1}{6}62\ [1{,}5\times1{,}5+1{,}2\times1{,}2+\sqrt{(1{,}5\times1.5)\ (1{,}2\times1{,}2)}]=\frac{1}{6}\ 62\times5$..... =	51,666		
Vol.*inmlcbfe*.... $=\frac{1}{6}62\times0{,}66\ [1{,}5+1{,}4+1{,}2+1+\sqrt{(1{,}5+1{,}4)\ (1{,}2+1)}]=\frac{1}{6}\ 62\times0{,}66\times7{,}62$ =	51,980		
Vol.*nkombagf*.. $=\frac{1}{6}62\times0{,}66\ [1{,}4+0{,}6+1+0{,}4+\sqrt{(1{,}4+0{,}6)\ (1+0{,}4)}]=\frac{1}{6}\ 62\times0{,}66\times4{,}48$ =	30,586		
Vol.*kpoaxg*..... $=\frac{1}{6}62\ [2{,}8\times0{,}6+2\times0{,}4+\sqrt{(2{,}8\times0{,}6)\ (2\times0{,}4)}]=\frac{1}{6}\ 62\times3{,}64$..... =	37,613		
	171,845	171,845	
Cubes des remblais entre les profils 8 *et* 9.			
Vol.*pqsxut*..... $=\frac{1}{6}62\ [7{,}4\times1+7{,}6\times0{,}8+\sqrt{(7{,}4\times1)\ (7{,}6\times0{,}8)}]=\frac{1}{6}\ 62\times20{,}18$..... =	208,526		208,526
Cubes des déblais entre les profils 9 *et* 10.			
Vol.*declkm*..... $=\frac{1}{6}50\ [1{,}2\times1{,}2+1\times1+\sqrt{(1{,}2\times1{,}2)\ 1}]=\frac{1}{6}\ 50\times3{,}63$..... =	30,250		
Vol.*cbfekinm* ... $=\frac{1}{6}50\times0{,}66\ [1{,}2+1+1+0{,}9+\sqrt{(1{,}2+1)\ (1+0{,}9)}]=\frac{1}{6}\ 50\times0{,}66\times6{,}14$ =	33,750		
Vol.*bafgihon*.... $=\frac{1}{6}50\times0{,}66\ [1+0{,}4+0{,}9+0{,}3+\sqrt{(1+0{,}4)\ (0{,}9+0{,}3)}]=\frac{1}{6}\ 50\times0{,}66\times3{,}9$ =	21,416		
Vol.*axghk'o* .... $=\frac{1}{6}50\ [2\times0{,}4+4\times0{,}3+\sqrt{(2\times0{,}4)\ (4\times0{,}3)}]+\frac{1}{6}\ 50\times2{,}97$..... =	24,750		
	110,166	110,166	
Cubes des remblais entre les profils 9 *et* 10.			
Vol.*xutk'pq* .... $=\frac{1}{6}50\ [7{,}6\times0{,}8+4{,}8\times0{,}3+\sqrt{(7{,}6\times0{,}8)\ (4{,}8\times0{,}3)}]=\frac{1}{6}\ 50\times10{,}47$ =	87,250		87,250
TOTAUX.....		2079,797	1896,293

REMARQUE. — Il n'arrive jamais que ces calculs soient d'une exactitude rigoureuse: il faudrait, pour que l'erreur fût infiniment petite, que les profils en travers fussent très-rapprochés; mais au moins suffisent-ils pour donner une évaluation approximative des mouvements de terre à exécuter, qui sera satisfaisante. Il est bon, quand le cube des déblais n'est pas égal à celui des remblais, que le cube des déblais surpasse un peu celui des remblais, afin que, si dans l'exécution on trouvait des pierres ou autres matériaux de bonne qualité, on pût les utiliser, soit pour faire les empierrements, soit pour la construction des aqueducs, des ponts, etc., que l'on pourrait avoir à construire.

EXERCICES A EXÉCUTER SUR LE TERRAIN.

312. 1°. Mesurer, avec le niveau d'eau, une ligne droite de grande étendue sur un terrain varié d'une manière quelconque, et le rapporter sur le papier;

2°. Mesurer, en les nivelant, des profils de route; en calculer la surface, en les décomposant en triangles, trapèzes, etc.;

3°. Construire en lattes plusieurs profils de route, donnés sur le papier;

4°. Lever le plan d'une portion de terrain, en faire le nivellement complet, et rapporter le tout sur le papier. Pour lever un plan, on devra se servir alternativement de la planchette, du grapho-

mètre, de la boussole, de l'équerre d'arpenteur, du goniasmomètre, etc., afin de se familiariser avec tous ces instruments;

5°. Lever le plan de quelques pièces d'un bâtiment, en calculer la surface; faire le métrage du blanchissage et des planchers, y appliquer des prix, et rapporter le tout sur le papier;

6°. Mesurer le volume d'un mur percé de fenêtres, en en déduisant les vides du volume total;

7°. Mesurer la surface d'un mur irrégulier donné; en mesurer l'épaisseur, calculer le volume de ce mur;

8°. Mesurer la surface et le volume d'un parallélipipède et d'un prisme obliques, construits avec des piquets inclinés, renoués par des cordeaux; faire le plan, la coupe et l'élévation de ces corps;

9°. Même opération pour une pyramide ou un tronc de pyramide à bases parallèles, pour un prisme triangulaire tronqué, pour un prisme polygonal tronqué, pour un cylindre dont on peut mesurer le diamètre, pour un puits ou l'intérieur d'une tour ronde;

10°. Même opération pour une couronne cylindrique, comme la margelle d'un puits, ou pour le volume de la maçonnerie d'une tour ronde;

11°. Même opération pour une tour ronde dont on ne peut mesurer immédiatement le diamètre, comme une colonne, ou une pièce de bois cylindrique;

12°. Même opération pour un cône droit, construit comme la pyramide, si l'on ne trouve pas effectivement le solide de cette forme ;

13°. Même opération pour un cône oblique (on n'en mesurera pas la surface) ;

14°. Même opération pour un tronc de cône à bases parallèles, pour une sphère, etc. ;

15°. Mesurer une portion de remblai et de déblai irrégulier, par la division du solide en prismes triangulaires tronqués ;

16°. Lever un bâtiment, en faire le croquis, le plan et l'élévation au trait ;

17°. Calculer les volumes de la maçonnerie et des bois de charpente qui s'y trouvent, ainsi que les planchers, les fenêtres, et y appliquer des prix.

FIN.

ERRATA.

Page 62, ligne 24, au lieu de *c*E,
lisez *c*E

Page 80, ligne 17, au lieu de *fig.* 101,
lisez *fig.* 107

Page 91, ligne 16, au lieu de *ch*,
lisez *cb*

Page 94, ligne 7, ajoutez *fig.* 114.

Ouvrages qui se trouvent chez BACHELIER, *Libraire à Paris.*

A LEIPSIC, chez MICHELSEN. || A LONDRES, chez DULAU et Cie.

GÉOMÉTRIE ET MÉCANIQUE DES ARTS ET MÉTIERS ET DES BEAUX-ARTS, par M. le baron *Ch. Dupin*, Membre de l'Institut; Cours normal, à l'usage des ouvriers et des artistes, des sous-chefs et des chefs d'ateliers et de manufactures, professé au Conservatoire royal des Arts et Métiers par l'auteur; 3 vol. in-8° avec 44 planches ..... 18 fr.

— 1er *volume*. GÉOMÉTRIE, ou des Formes nécessaires à l'Industrie, 6 fr.

— 2me *volume*. MACHINES ÉLÉMENTAIRES nécessaires à l'Industrie... 6 fr.

— 3me *volume*. FORCES MOTRICES nécessaires à l'Industrie ..... 6 fr.

TABLES DES LOGARITHMES pour les nombres et les sinus, etc., par LALANDE, Membre de l'Institut, revues par Reynaud, examinateur des Candidats pour l'École Polytechnique; PRÉCÉDÉES DE LA TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE, par *le même;* 1 vol. in-18, avec planches, 1818..... 3 fr.

Les tables de Logarithmes de LALANDE seules, sans la Trigonométrie de M. Reynaud, se vendent séparément..... 2 fr.

—— *Les mêmes*, DEMI-RELIURE, *dos de basane*..... 2 fr. 50 c.

TABLES DE LOGARITHMES par *le même*, étendues à SEPT DÉCIMALES, par MARIE, précédées d'une Instruction dans laquelle on fait connaître les limites des erreurs qui peuvent résulter de l'emploi des Logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques, etc., par M. le baron REYNAUD, examinateur des élèves qui se destinent à l'École Polytechnique, à la Marine, à l'École militaire de Saint-Cyr, etc., corrigé, in-12.... 3 fr. 50 c.

GUIDE PRATIQUE ET MÉMORATIF DE L'ARPENTEUR, particulièrement destiné aux personnes qui n'ont point étudié la Géométrie; contenant toutes les méthodes nécessaires pour l'Arpentage, le levé des plans, l'aménagement des bois, le nivellement, le toisé, suivi d'un nouveau mode d'observer les angles d'une triangulation, etc., etc., par M. LEFÈVRE, employé supérieur du Cadastre; 1 gros vol. in-12, avec dix-huit planches, dont une coloriée, 1833..... 6 fr. 50 c.

MANUEL DU TRIGONOMÈTRE, servant de Guide aux jeunes Ingénieurs qui se destinent aux opérations géodésiques, suivi de diverses solutions de Géométrie pratique, de quelques Notes et de plusieurs Tableaux, par *le même;* 1 vol. in-8°, avec planches, 1819..... 5 fr.

APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE à la mesure des lignes inaccessibles et des surfaces planes, etc., ou Longiplanimétrie pratique, par *le même;* in-8°, 5 fig., 1827..... 5 fr.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE, résolus de différentes manières, par MASCHERONI; traduit de l'italien; vol. in-8°, 2e édition, 1838.. 3 fr. 50 c.

LEÇONS DE GÉOMÉTRIE THÉORIQUE ET PRATIQUE, par MAUDUIT; nouvelle édition, revue, corrigée et augmentée, 2 vol. in-8°, avec 17 planches..... 10 fr.

que p

Fig. 1

Fig

8.

6.

c

Fig

D

Fi

Fig. 6.

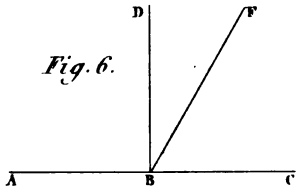


Fig. 7.

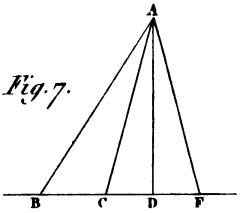


Fig. 14.

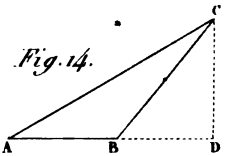


Fig. 15.

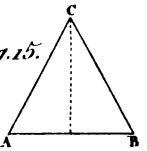


Fig. 22.

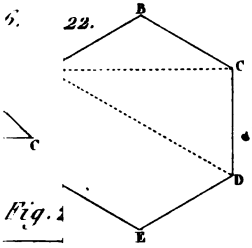


Fig. 23.

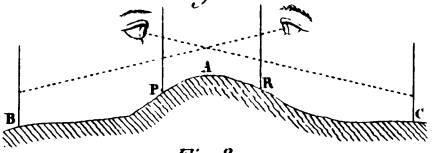


Fig. 32.

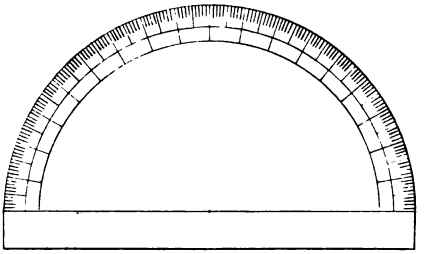


Fig. 31.

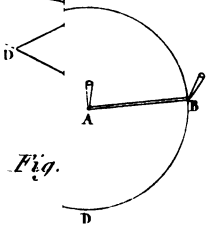


Fig. 33.

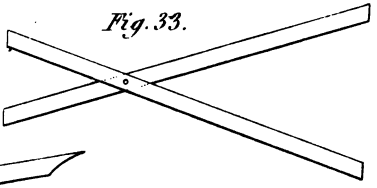
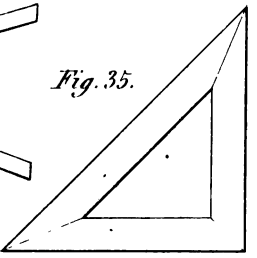
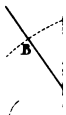


Fig. 35.

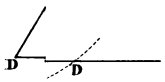


THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R L



Fig



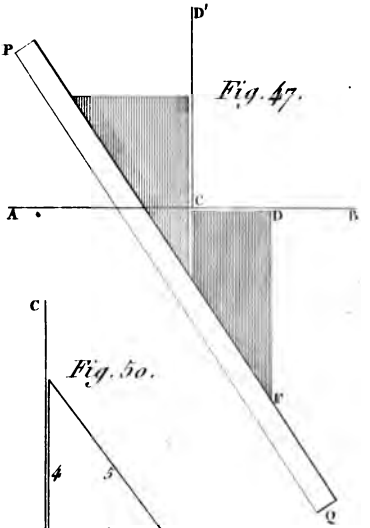


Fig. 47.

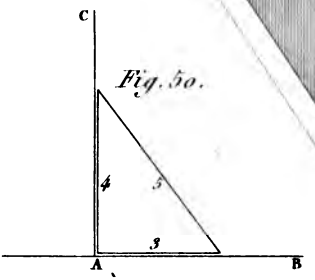
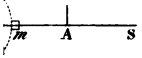


Fig. 50.

Fig.



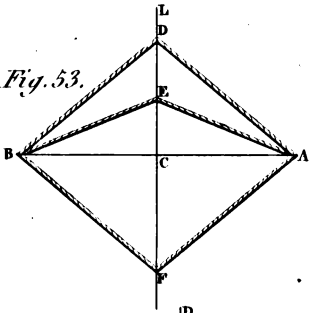


Fig. 53.

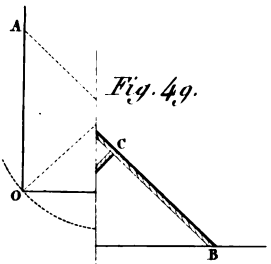


Fig. 49.

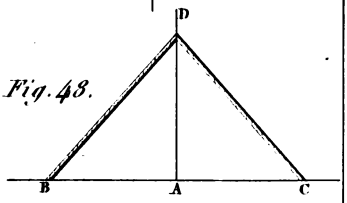


Fig. 48.

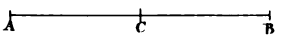


Fig. 52.

Gravé par Wormser.

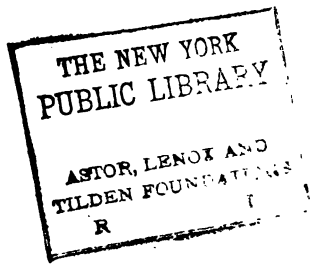

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R

Fig.

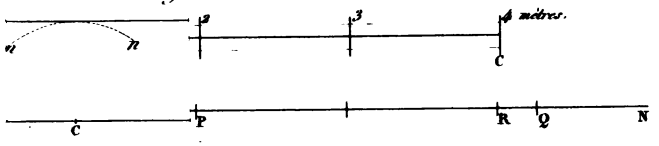


Fig. mètre.

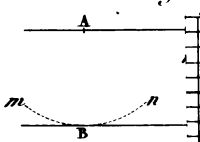


Fig. 69.

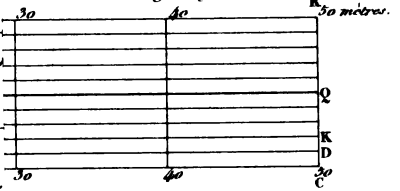


Fig.

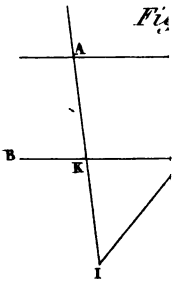


Fig. 71.

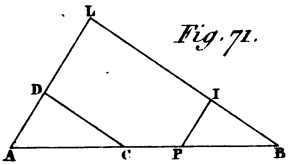


Fig.

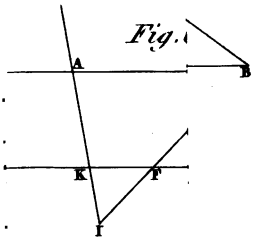


Fig. 75.

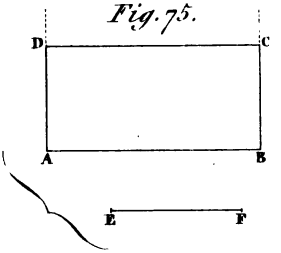
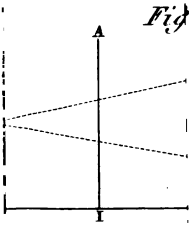


Fig.



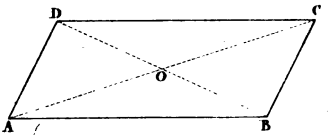
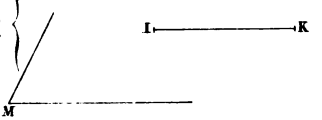
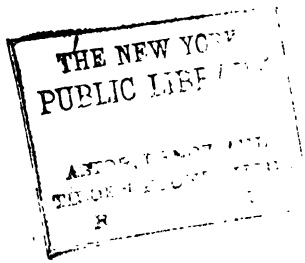


Fig. 76.



Gravé par Normier.


THE NEW YO
PUBLIC LIBR

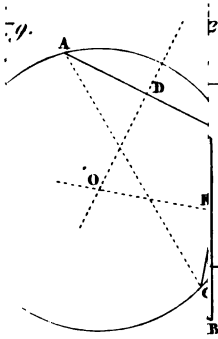
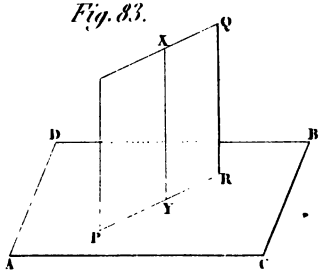


Fig. 83.



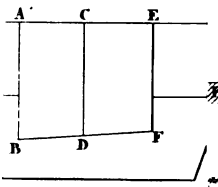


Fig. 88.

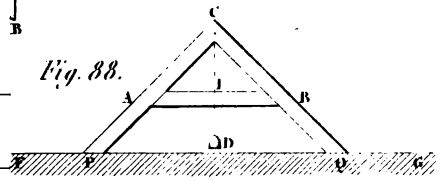


Fig. 89.

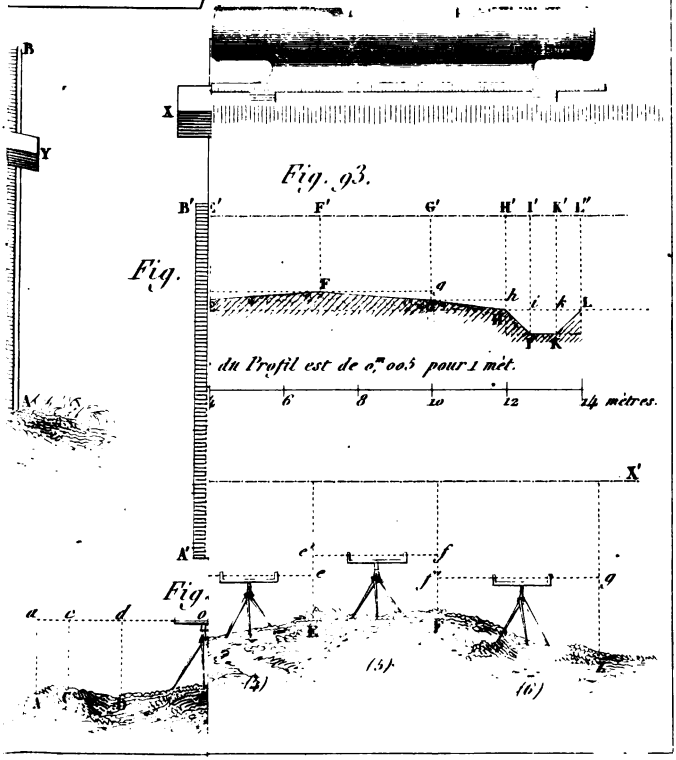
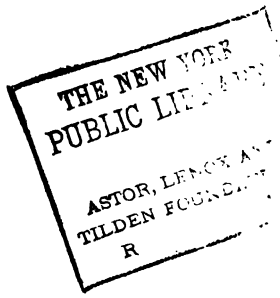


Fig. 93.

Fig.


THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R

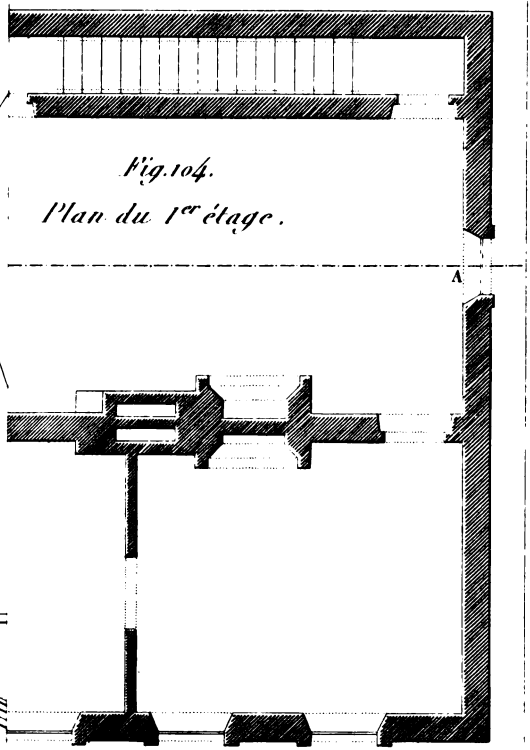
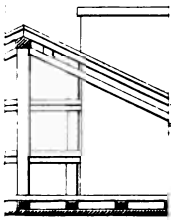


Fig. 104.
Plan du 1er étage.

uivant A B.



ig. 105.

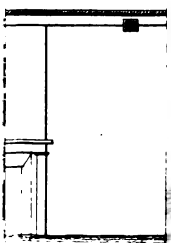
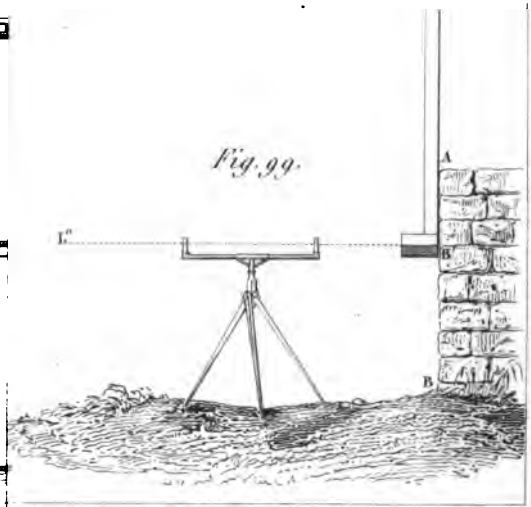
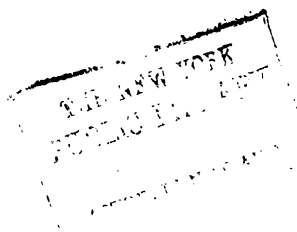


Fig. 99.





du Plan du rez-de-chaussée.

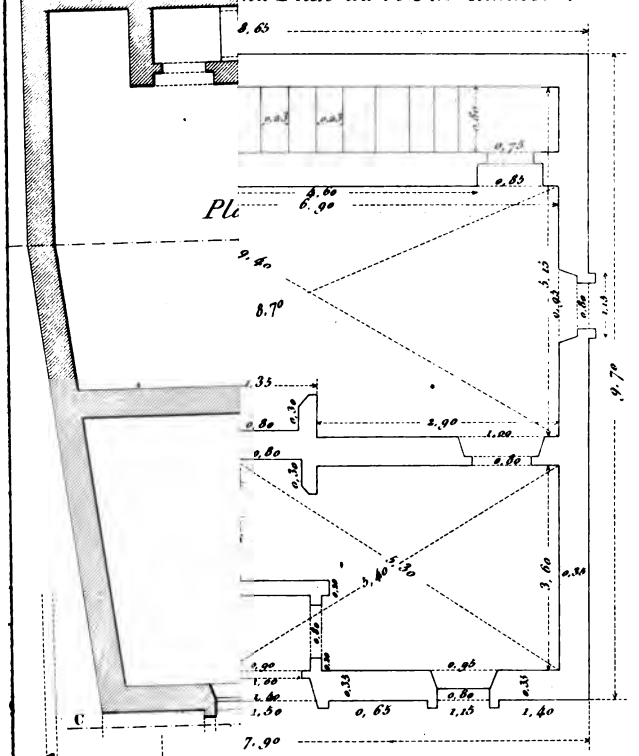


Fig. II.

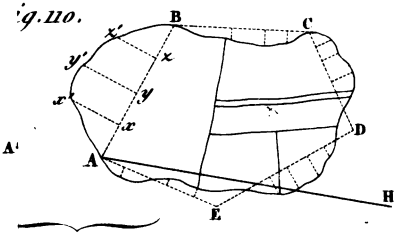
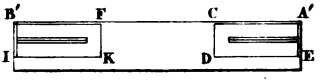
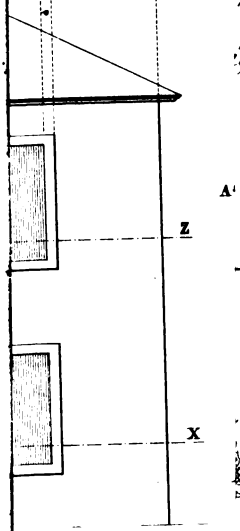
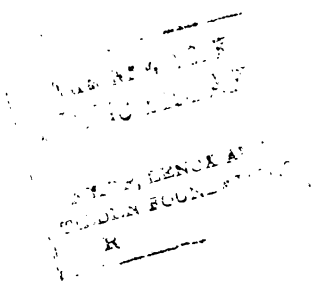


Fig. III.







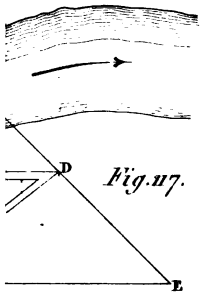


Fig. 117.

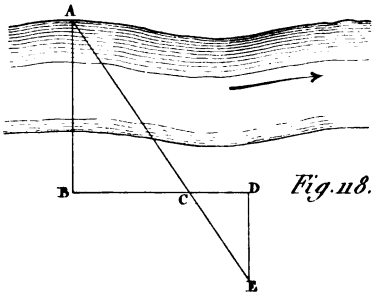
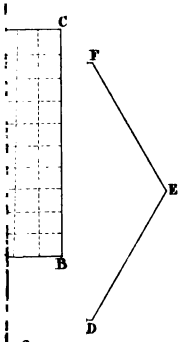


Fig. 118.



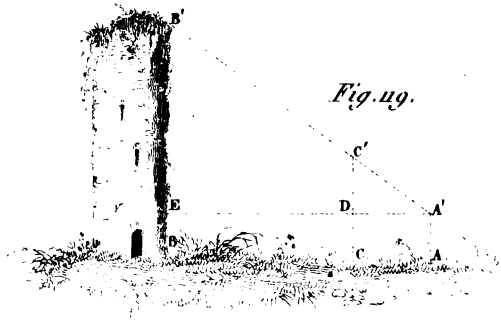


Fig. 119.

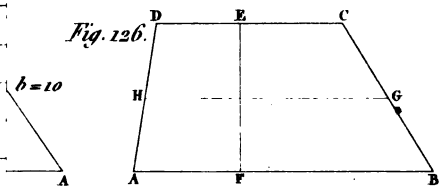


Fig. 126.

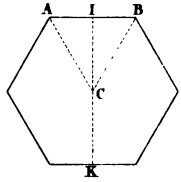


Fig. 128.

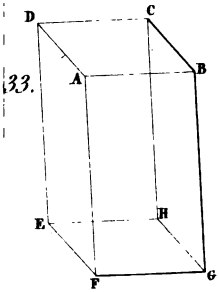


Fig. 133.

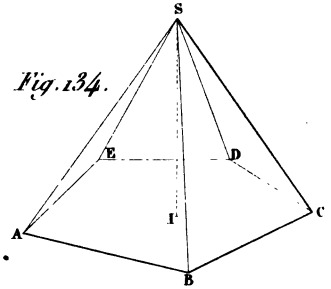
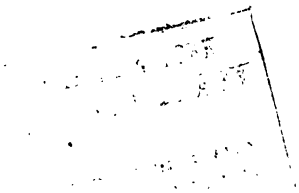


Fig. 134.



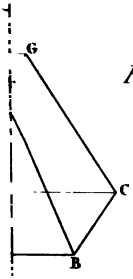


Fig.139.

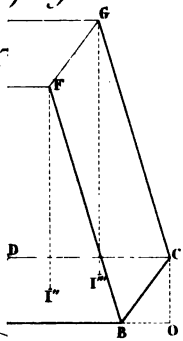


Fig.141.

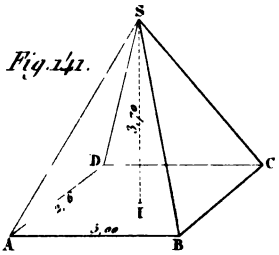


Fig.142.

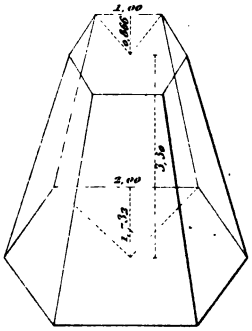


Fig.143.

Fig.140.

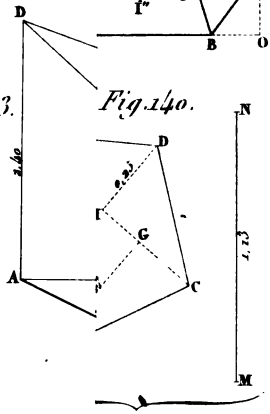
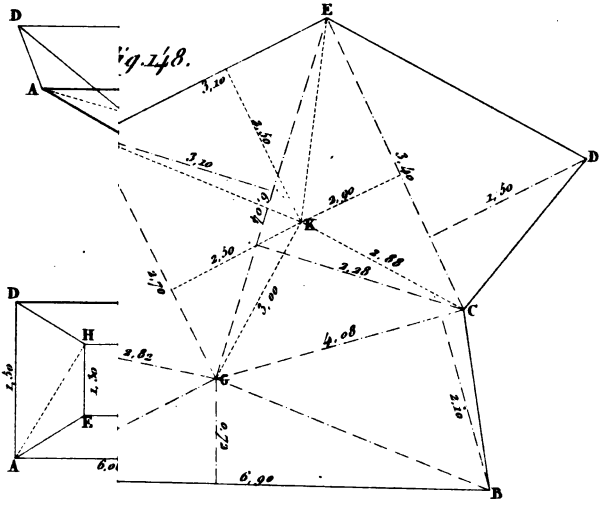
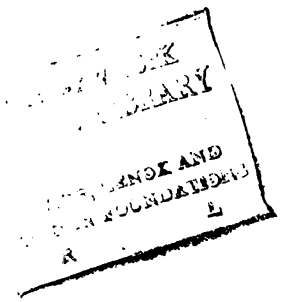


Fig.148.





LENOX AND
FOUNDATIONS
R L

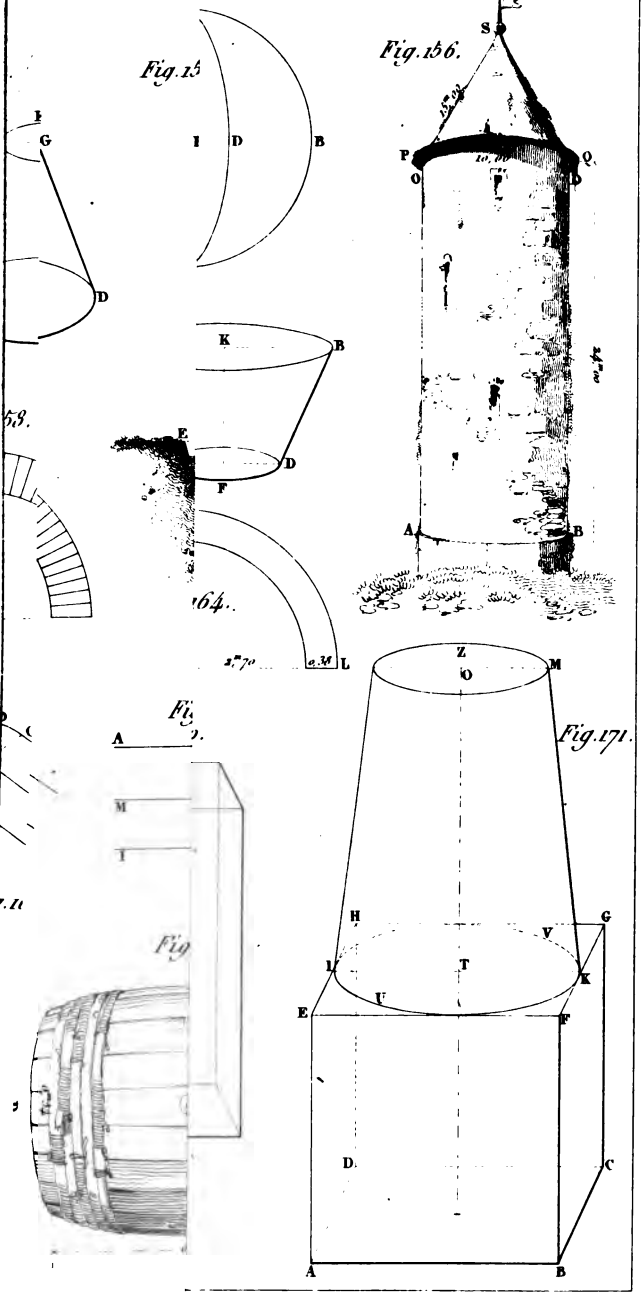
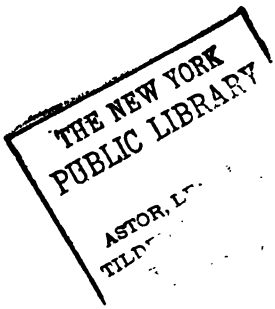
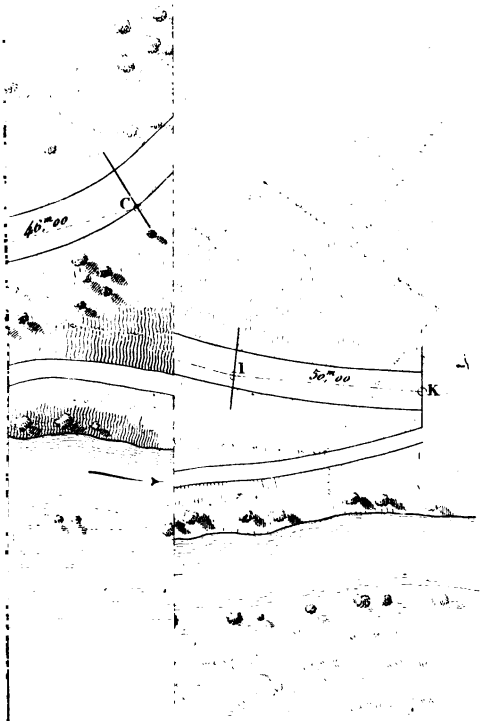


Fig. 15
Fig. 156.
Fig. 171.
Fig
Fig
S
P
Q
O
A
B
G
D
I
K
E
F
L
Z
M
H
V
T
U
C
Wormser sc.


THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, L
TIL



Echelle de 0,m00

60 80 1

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LEN
TILDEN

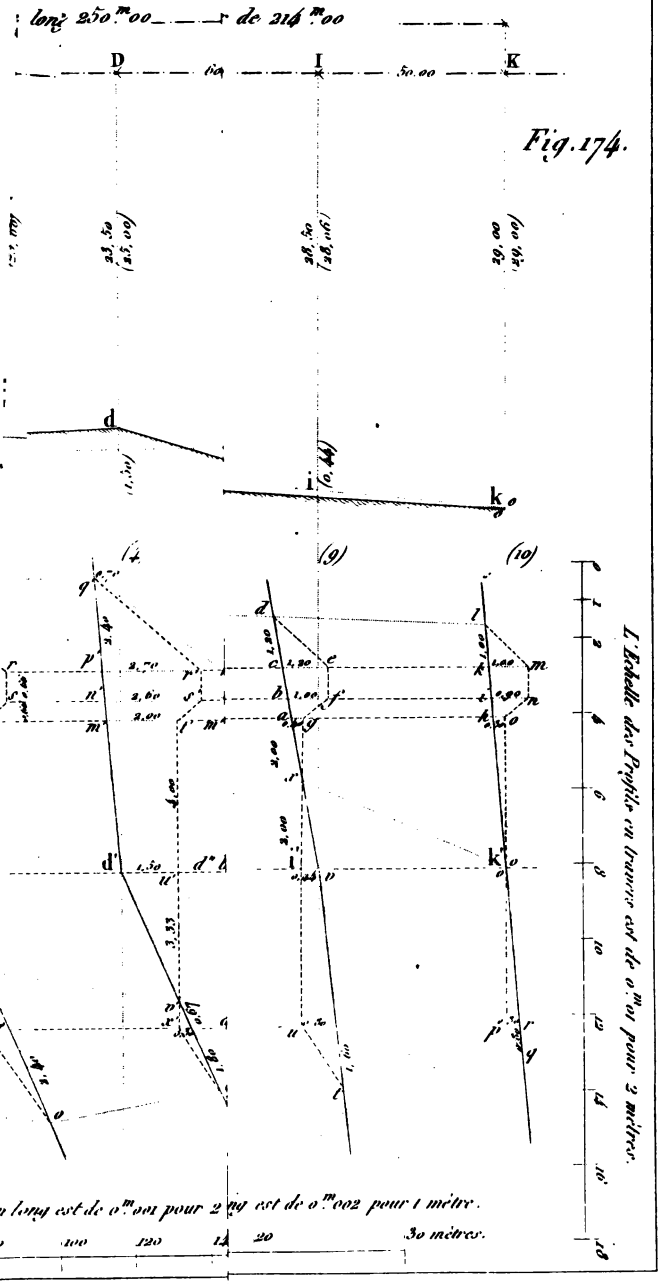
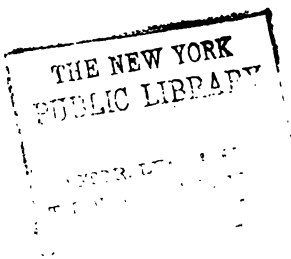

long. 250.m00
de 214.m00
D
I
K
50.00
(14)
(9)
(10)
L'Echelle des Profils en travers est de 0.m01 pour 2 mètres.
Y en long est de 0.m001 pour 2 mq est de 0.m002 pour 1 mètre.
30 mètres.

Fig. 174.


THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY